

Método de análisis de vibraciones en sistemas mecánicos multicuerpo An approach for the vibration analysis of mechanical multibody systems

J. Jesús Cervantes-Sánchez*, José de Jesús Pérez-Lona

Universidad de Guanajuato-DICIS, Comunidad de Palo Blanco
Salamanca, Guanajuato, 36885, México.

*Autor contacto. Correo electrónico: jecer@ugto.mx

Resumen

En este artículo se presenta una nueva metodología para analizar las vibraciones en sistemas mecánicos multicuerpo. Para ello se propone un conjunto de etapas sistemáticamente ordenadas, las cuales permiten una formulación adecuada de los análisis cinemático y cinético. La integración sistemática de la cinemática y la cinética conduce a la obtención de las ecuaciones de equilibrio estático en forma cerrada. Esto permite conocer todas las configuraciones de equilibrio alcanzadas por el sistema. Como resultado, se pueden calcular sistemáticamente todas las frecuencias naturales y relaciones de amortiguamiento correspondientes. Además, el nivel de detalle del análisis cinemático permite eliminar algunas variables para obtener ecuaciones de movimiento más simples. Con el objetivo de mostrar la aplicabilidad del método, se proporciona un caso de estudio detallado

Abstract

This paper introduces a novel approach to analyze the vibrations associated with multibody mechanical systems. The proposed methodology comprises a set of systematically ordered stages, which allow an adequate formulation of the kinematic and kinetic analyses. The systematic integration of kinematics and kinetics leads to the obtaining of static equilibrium equations in closed form. This allows to know all the equilibrium configurations reached by the system. As a result, all the natural frequencies and damping ratios can be systematically computed. Moreover, the appropriate detail level of the kinematic analysis allows the elimination of some variables in order to obtain simpler motion equations. A fully detailed case study is provided to show the applicability and the feasibility of the proposed approach

Palabras clave:

Vibraciones, frecuencia natural, sistema mecánico multicuerpo

Keywords:

Vibrations, natural frequency, multibody mechanical system

Introducción

Es bien sabido que un incremento en la productividad de los sistemas de alta tecnología utilizados por la industria moderna depende fuertemente de la capacidad que tengan las máquinas para producir a más altas velocidades.

Las máquinas frecuentemente contienen mecanismos con eslabones móviles que inducen vibraciones en los componentes estructurales debido a la aplicación de cargas tales como fuerzas y pares de torsión. Por lo tanto, un estudio adecuado de las vibraciones resulta de gran interés para predecir el comportamiento dinámico de potenciales aplicaciones prácticas que, manteniendo una velocidad elevada del proceso de producción, eviten dañar la integridad física, tanto de las máquinas como de los productos manejados. En este sentido, un conocimiento de las frecuencias naturales de vibración de una máquina sería muy beneficioso. Entonces, utilizando velocidades de proceso de las máquinas que no se acerquen a las frecuencias naturales de vibración, se estaría así evitando que la máquina entre en resonancia y se pueda dañar o destruir por sí misma [1].

El cálculo de las frecuencias naturales de vibración de una máquina requiere de un modelo dinámico integral que incluya aspectos tanto cinemáticos como cinéticos. El principal reto se debe a que el modelo dinámico típico de un sistema multicuerpo es altamente no lineal, tanto en el aspecto cinemático como en el aspecto cinético.

Adicionalmente, muchas veces resulta necesario investigar el movimiento vibratorio de un mecanismo alrededor de su configuración de equilibrio. Sin embargo, la naturaleza de muchos mecanismos es tal que las características de vibración varían significativamente de una configuración de equilibrio a otra. Más aún, se ha reportado [2] que encontrar las configuraciones de equilibrio en forma cerrada es muy difícil. Esto motivó a escribir el presente artículo.

En este artículo se propone la utilización de un modelo dinámico detallado, tanto en el aspecto cinemático como en el aspecto cinético. Como resultado se obtiene una ecuación en forma cerrada, la cual permite calcular todas las configuraciones de equilibrio del mecanismo. Como ejemplo, se

encontró que en realidad se tienen doce configuraciones de equilibrio, en lugar de tener únicamente las tres configuraciones de equilibrio para el caso de estudio reportado en [2]. Finalmente, el método propuesto permite calcular todas las frecuencias naturales y razones de amortiguamiento.

Definición del problema.

En la Figura 1 se muestra el mecanismo que será analizado, el cual tiene un resorte con una constante de rigidez k y un amortiguador con una constante de amortiguamiento viscoso b . Los puntos A , B y C , representan los centros de masa de las dos correderas, 1, 2, y la barra, 3, las cuales tienen masas m_A , m_B y m_C , respectivamente. Por otro lado, se tiene una fuerza F aplicada en la dirección de movimiento de la corredera 2. Este mecanismo ha sido empleado por Doughty [2] como ejemplo para ilustrar la aplicación de las ecuaciones de Eksergian en sistemas mecánicos de un grado de libertad.

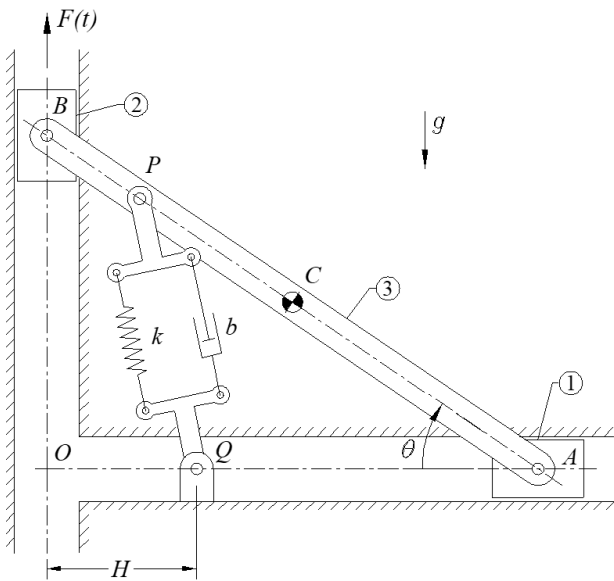


Figura 1 – Mecanismo empleado por Doughty [2].

Dado que el modelo dinámico de este mecanismo es altamente no lineal, se utilizará un método integral, diferente al reportado en [2], el cual es general, y puede aplicarse para analizar las vibraciones de sistemas mecánicos más complejos. La generalidad del método aquí propuesto se debe a que éste involucra una serie de etapas que permiten desarrollar un análisis cinemático detallado y un análisis cinético detallado, ver Tabla 1. Ambos análisis se combinan de una manera sistemática, ordenada e integral. Como resultado se puede obtener, en forma simbólica y cerrada, el modelo dinámico general, el modelo estático, así como el modelo vibratorio. Por lo expresado anteriormente, puede deducirse que el procedimiento propuesto en este artículo es más general y produce un análisis más detallado que el propuesto en [3]. En [3] sólo se proponen siete pasos, no se detalla la cinemática y se enfoca principalmente al cálculo de los términos de las ecuaciones de Lagrange. Sólo se obtienen las ecuaciones de movimiento, y no se indica nada acerca del equilibrio está-

tico, la ecuación perturbada, frecuencia natural y razón de amortiguamiento. Finalmente, en el análisis cinético también podrían utilizarse las leyes de Euler, en lugar de utilizar las ecuaciones de Lagrange.

Tabla 1 – Algoritmo computacional.

ALGORITMO COMPUTACIONAL	
I. Cinemática.	
1.	Diagrama esquemático.
2.	Diagrama cinemático auxiliar.
3.	Ecuaciones de restricción en posición.
4.	Ecuaciones y matriz de restricción en velocidad.
5.	Ecuaciones de restricción en aceleración.
6.	Cinemática de puntos de interés.
II. Cinética.	
7.	Ecuaciones de movimiento.
III. Análisis vibratorio.	
8.	Equilibrio estático.
9.	Ecuación perturbada.
10.	Frecuencia natural y razón de amortiguamiento.

Análisis cinemático.

Para desarrollar el análisis cinemático de manera sistemática y ordenada se proponen las siguientes etapas.

Diagrama cinemático auxiliar.

Para el mecanismo mostrado en la Fig. 1, se propone el diagrama cinemático auxiliar mostrado en la Fig. 2. Por lo tanto, se tiene el siguiente vector de coordenadas generalizadas del mecanismo:

$$\mathbf{q} = [p \ q \ r \ \theta \ \phi]^T \tag{1}$$

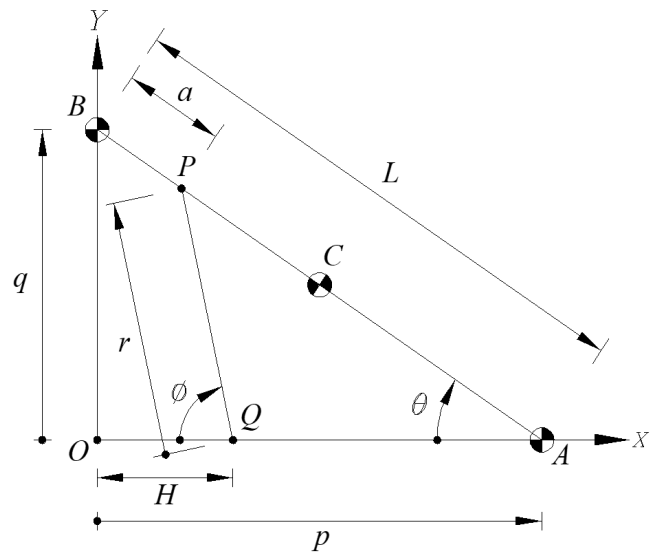


Figura 2 – Diagrama cinemático auxiliar del mecanismo.

Es importante notar que la variable r estará asociada con la longitud del resorte y del amortiguador, mientras que la variable θ será utilizada para describir la orientación de la barra 3 en cualquier configuración arbitraria que adopte el mecanismo bajo estudio.

Polígonos de vectores posición

A partir del diagrama cinemático auxiliar se pueden construir dos polígonos de vectores posición que se preservan durante el movimiento del mecanismo, los cuales se muestran en la Fig. 3.

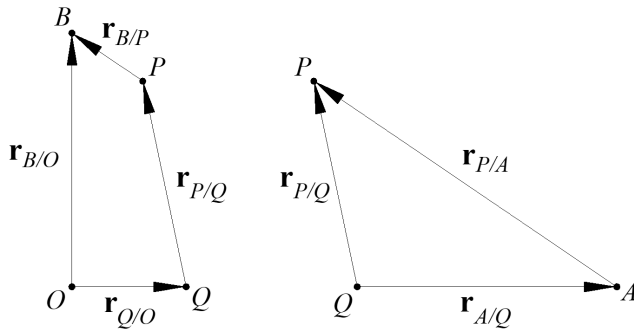


Figura 3 – Polígonos de vectores posición.

Las ecuaciones vectoriales que caracterizan a los polígonos de vectores posición mostrados en la Fig. 3 vienen dadas por:

$$\mathbf{r}_{B/O} = \mathbf{r}_{Q/O} + \mathbf{r}_{P/Q} + \mathbf{r}_{B/P} \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_{A/Q} + \mathbf{r}_{P/A} = \mathbf{r}_{P/Q} \quad (3)$$

respectivamente, donde \mathbf{r}_{ij} representa al vector posición del punto i con respecto al punto j .

Ecuaciones de restricción en posición

Utilizando la geometría mostrada en la Fig. 2 para obtener los distintos vectores posición involucrados en las ecuaciones (2) y (3) se obtiene que:

$$f_1 = a \cos \theta - H + r \cos \phi = 0 \quad (4)$$

$$f_2 = q - a \sin \theta - r \sin \phi = 0 \quad (5)$$

$$f_3 = p - H - (L - a) \cos \theta + r \cos \phi = 0 \quad (6)$$

$$f_4 = (L - a) \sin \theta - r \sin \phi = 0 \quad (7)$$

las cuales se conocen como ecuaciones de restricción en posición.

Ecuaciones de restricción en velocidad

Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones (4) a (7), se obtiene que:

$$\frac{df_1}{dt} = -a\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\phi} \sin \phi + \dot{r} \cos \phi = 0 \quad (8)$$

$$\frac{df_2}{dt} = \dot{q} - a\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\phi} \cos \phi - \dot{r} \sin \phi = 0 \quad (9)$$

$$\frac{df_3}{dt} = \dot{p} + (L - a)\dot{\theta} \sin \theta + \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi = 0 \quad (10)$$

$$\frac{df_4}{dt} = (L - a)\dot{\theta} \cos \theta - \dot{r} \sin \phi - r\dot{\phi} \cos \phi = 0 \quad (11)$$

las cuales se conocen como ecuaciones de restricción en velocidad, donde un punto sobre una variable significa la primera derivada de dicha variable con respecto al tiempo.

Cinemática de puntos de interés

Como los puntos A , B y C representan al centro de masa de los eslabones móviles, y utilizando la geometría mostrada en la Fig. 2, sus respectivos vectores posición y velocidad se calculan mediante:

$$\mathbf{r}_{A/O} = p\mathbf{i}, \quad \mathbf{v}_{A/O} = \dot{\mathbf{r}}_{A/O} = \dot{p}\mathbf{i} \quad (12)$$

$$\mathbf{r}_{B/O} = q\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_{B/O} = \dot{\mathbf{r}}_{B/O} = \dot{q}\mathbf{j} \quad (13)$$

$$\mathbf{r}_{C/O} = \mathbf{r}_{A/O} + \mathbf{r}_{C/A} = p\mathbf{i} + \left(-\frac{L}{2} \cos \theta \mathbf{i} + \frac{L}{2} \sin \theta \mathbf{j} \right), \quad (14)$$

$$\mathbf{v}_{C/O} = \dot{\mathbf{r}}_{C/O} = \left(\dot{p} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \right) \mathbf{i} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j}$$

donde \mathbf{v}_{ij} representa al vector velocidad del punto i con respecto al punto j .

Análisis cinético

En esta sección se muestra el desarrollo de las ecuaciones de movimiento del sistema bajo estudio. Para ello se utilizarán las ecuaciones de Lagrange.

Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un sistema mecánico se expresan como [4]:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right]^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q}_{NC} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\Psi}_D \quad (15)$$

donde:

$\dot{\mathbf{q}}$ = vector de coordenadas generalizadas,

\mathbf{q} = vector de velocidades generalizadas,

$L \equiv T - V$ = Lagrangiano,

\mathbf{Q}_{NC} = vector de fuerzas no conservativas,

\mathbf{A} = matriz de restricción en velocidad,

$\boldsymbol{\lambda}$ = vector de multiplicadores de Lagrange,

$\boldsymbol{\Psi}_D$ = vector de fuerzas disipativas.

Es importante notar que, una vez obtenido el diagrama cinemático auxiliar y su correspondiente vector de coordenadas generalizadas, la aplicación de las ecuaciones de Lagrange se simplifica considerablemente. De hecho, un simple diagrama cinemático auxiliar permite integrar de manera sistemática el análisis cinemático con el análisis cinético.

Términos de las ecuaciones de Lagrange

A continuación se presentan las expresiones simbólicas de los diferentes términos involucrados en las ecuaciones de Lagrange.

Energía cinética

Primeramente, la energía cinética asociada con cada uno de los cuerpos en movimiento viene dada por:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_A (\mathbf{v}_{A/O} \cdot \mathbf{v}_{A/O}) = \frac{1}{2} m_A \dot{p}^2 \tag{16}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_B (\mathbf{v}_{B/O} \cdot \mathbf{v}_{B/O}) = \frac{1}{2} m_B \dot{q}^2 \tag{17}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_C (\mathbf{v}_{C/O} \cdot \mathbf{v}_{C/O}) + \frac{1}{2} I_C (\boldsymbol{\omega}_{3/0} \cdot \boldsymbol{\omega}_{3/0}) \tag{18}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_C \left(\dot{p}^2 + L \dot{\theta} \sin \theta + \frac{L^2 \dot{\theta}^2}{3} \right)$$

Finalmente, la energía cinética total del sistema será:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_A \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_C \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m_C L \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{6} m_C L^2 \dot{\theta}^2 \tag{19}$$

Energía potencial gravitatoria

La energía potencial gravitatoria del sistema mecánico tomando como nivel de referencia el eje X está dada por:

$$V_G = V_{G1} + V_{G2} + V_{G3} = 0 + m_B g q + m_C g \frac{L}{2} \sin \theta \tag{20}$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

Energía potencial de deformación elástica

La energía potencial de deformación elástica se puede calcular como:

$$V_E = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} k (r - l_{ND})^2 \tag{21}$$

donde l_{ND} es la longitud no deformada del resorte.

El Lagrangiano y sus derivadas

El Lagrangiano para este sistema mecánico queda como:

$$L = \frac{1}{2} m_A \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_C \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m_C L \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{6} m_C L^2 \dot{\theta}^2 - m_B g q - m_C g \frac{L}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} k (r - l_{ND})^2 \tag{22}$$

Las derivadas del Lagrangiano que se requieren vienen dadas por:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right]^T = \begin{bmatrix} (m_A + m_C) \ddot{p} + \frac{1}{2} m_C L \ddot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} m_C L \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ m_B \ddot{q} \\ 0 \\ \frac{1}{2} m_C L \ddot{p} \sin \theta + \frac{1}{2} m_C L \dot{p} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{3} m_C L^2 \ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_B g \\ -k(r - l_{ND}) \\ \frac{1}{2} m_C L \dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} m_C g L \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

las cuales se han agrupado en vectores de dimensión (5×1) .

Matriz de restricción en velocidad

La matriz de restricción en velocidad \mathbf{A} se define de tal manera que $\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, la cual, para el caso bajo estudio queda como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \phi & -a \sin \theta & -r \sin \phi \\ 0 & 1 & \sin \phi & -a \cos \theta & -r \cos \phi \\ 1 & 0 & \cos \phi & (L - a) \sin \theta & -r \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & (L - a) \cos \theta & -r \cos \phi \end{bmatrix} \tag{25}$$

siendo una matriz de dimensión (4×5) .

Multiplicadores de Lagrange

Dado que existen cuatro ecuaciones de restricción en posición, (4)–(7), las cuales tendrán asociado un multiplicador de Lagrange, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, respectivamente, entonces el vector de multiplicadores de Lagrange estará dado por:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4]^T \tag{26}$$

Realizando el producto matricial $\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$ se encuentra que:

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \cos \phi - \lambda_2 \sin \phi + \lambda_3 \cos \phi - \lambda_4 \cos \phi \\ -\lambda_1 a \sin \theta - \lambda_2 a \cos \theta + \lambda_3 (L - a) \sin \theta + \lambda_4 (L - a) \cos \theta \\ -\lambda_1 r \sin \phi - \lambda_2 r \sin \phi - \lambda_3 r \sin \phi - \lambda_4 r \cos \phi \end{bmatrix} \tag{27}$$

resultando así en un vector de dimensión (5×1) .

Vector de fuerzas no conservativas

Como F es la única fuerza externa no conservativa que actúa sobre el mecanismo bajo estudio en la misma dirección y sentido en que fue definida la variable q , entonces, el vector de fuerzas no conservativas vendrá dado por:

$$\mathbf{Q}_{NC} = [0 \quad F \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{28}$$

el cual tiene una dimensión (5×1) .

Vector de fuerzas disipativas

El vector de fuerzas disipativas viene dado por:

$$\boldsymbol{\Psi}_D = [0 \quad 0 \quad b \dot{r} \quad 0 \quad 0]^T \tag{29}$$

donde b es el coeficiente de fricción viscosa asociado con el amortiguador que forma parte del sistema bajo estudio.

Relaciones cinemáticas adicionales

Para encontrar la ecuación de movimiento que dependa únicamente de la variable θ , se necesitan algunas relaciones cinemáticas adicionales. Para este fin, de las ecuaciones (4)–(7) se encuentra que:

$$q = L \sin \theta \quad (30)$$

$$p = L \cos \theta \quad (31)$$

Derivando dos veces con respecto al tiempo a las ecuaciones (30)–(31), se obtiene que:

$$\dot{q} = L\dot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (32)$$

$$\dot{p} = -L\dot{\theta} \sin \theta - L\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (33)$$

Manejando algebraicamente las ecuaciones (4)–(7) se encuentra que:

$$r = \sqrt{((L-a)\sin \theta)^2 + (H-a\cos \theta)^2} \quad (34)$$

De la misma manera, manejando algebraicamente las ecuaciones (8) a (11), se obtiene la velocidad con la que se deforma el amortiguador:

$$\dot{r} = \frac{(Ha + (L^2 - 2La)\cos \theta)\dot{\theta} \sin \theta}{\sqrt{((L-a)\sin \theta)^2 + (H-a\cos \theta)^2}} \quad (35)$$

la cual involucra explícitamente a la coordenada generalizada θ , así como a su primera derivada con respecto al tiempo, $\dot{\theta}$.

Ecuación de movimiento resultante

Primeramente, debe notarse que la forma compacta de la ecuación (15), proviene de su misma naturaleza vectorial. Como consecuencia de ello, al final de cuentas, la ecuación vectorial (15) en realidad representa un sistema de cinco ecuaciones escalares de Lagrange. Dichas ecuaciones están muy acopladas entre sí, ya que cada una de ellas involucra simultáneamente a dos o más coordenadas generalizadas. Adicionalmente, también involucran a los 4 multiplicadores de Lagrange resultantes. Con todo ello, las cinco ecuaciones escalares resultantes dificultan una posible visualización e interpretación física de los diferentes parámetros que influyen en el comportamiento dinámico (relación causa-efecto) del sistema mecánico bajo estudio. Por todo lo anterior, la experiencia ha demostrado que son más fáciles de interpretar aquellas ecuaciones de movimiento que dependen de una sola variable. Por ello se propone el siguiente procedimiento.

Resolviendo las ecuaciones de Lagrange para los multiplicadores de Lagrange, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, y utilizando las relaciones adicionales (32)–(35), se obtiene la ecuación de movimiento resultante:

$$\varepsilon_1 \ddot{\theta} + \varepsilon_2 \dot{\theta}^2 + \varepsilon_3 \dot{\theta} + \varepsilon_4 \sin \theta + \varepsilon_5 \cos \theta = 0 \quad (36)$$

donde:

$$\varepsilon_1 = \left(m_A \sin^2 \theta + m_B \cos^2 \theta + \frac{m_C}{3} \right) L^2 \quad (37)$$

$$\varepsilon_2 = (m_A - m_B) L^2 \sin \theta \cos \theta \quad (38)$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{[(Ha + (L^2 - 2La)\cos \theta)]^2}{r^2} \right) b \sin^2 \theta \quad (39)$$

$$\varepsilon_4 = \left(\frac{(\Delta - l_{ND})(Ha + (L^2 - 2La)\cos \theta)}{r} \right) k \quad (40)$$

$$\varepsilon_5 = \left(-F + \left(m_B + \frac{m_C}{2} \right) g \right) L \quad (41)$$

la cual depende únicamente de la variable θ , y muestra una estructura matemática altamente no lineal.

Equilibrio estático.

Dada la forma de la ecuación de movimiento resultante, la condición de equilibrio estático se define como:

$$\theta = \theta_E, \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0 \quad (42)$$

donde θ_E representa la posición de equilibrio estático. Sustituyendo la ecuación (42) en la ecuación (36) se obtiene:

$$k \left\{ \frac{(r_E - l_{ND})(Ha + (L^2 - 2La)\cos \theta_E)}{r_E} \right\} \sin \theta_E + \left\{ -FL + m_B + \frac{m_C}{2} Lg \right\} \cos \theta_E = 0, r_E = r(\theta = \theta_E) \quad (43)$$

Utilizando las identidades trigonométricas:

$$\sin \theta_E = \frac{2\tau}{1+\tau^2}, \quad \cos \theta_E = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \quad \tau \equiv \tan \left(\frac{\theta_E}{2} \right) \quad (44)$$

en la ecuación (43), resulta en una ecuación polinomial:

$$\sum_{i=0}^{12} \sigma_i \tau^i = 0 \quad (45)$$

de grado 12 en τ . Entonces dependiendo de los valores numéricos de los parámetros característicos del sistema es posible obtener hasta un máximo de doce posiciones de equilibrio.

Aquí es importante notar que la forma cerrada ofrecida por la ecuación (45) se debe fundamentalmente a las ecuaciones de restricción en posición, ecuaciones (4)–(7), involucradas en el análisis cinemático. Dicha forma cerrada permite identificar de manera sistemática todas las configuraciones de equilibrio estático que puede alcanzar el sistema mecánico bajo estudio. Como se verá posteriormente, una plena identificación de todas las configuraciones de equilibrio estático reviste especial importancia cuando se estudian las vibraciones de un sistema mecánico.

Ecuación perturbada y linealización.

En una configuración de equilibrio estático la velocidad y la aceleración son iguales a cero. De aquí que una manera muy conveniente de visualizar y entender el movimiento vibratorio es analizándolo con respecto a alguna de las posibles configuraciones de equilibrio estático, en las cuales el sistema mecánico se encuentra en un estado de reposo que puede ser permanente (estable), o cuando menos instantáneo (inestable).

Considerando pequeñas oscilaciones θ_p , alrededor de la configuración de equilibrio θ_E , se tiene que:

$$\theta = \theta_E + \theta_p \quad (46)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_p \quad (47)$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_p \quad (48)$$

Sustituyendo las ecuaciones (46)–(48) en la ecuación (36), y con el objetivo de reducir la alta complejidad que exhibe un sistema no lineal, y de obtener un modelo manejable para el análisis de vibraciones, se utilizan series de Taylor y se conservan sólo los términos lineales, así obteniendo que:

$$M_{EQ}\ddot{\theta}_p + B_{EQ}\dot{\theta}_p + K_{EQ}\theta_p = 0 \quad (49)$$

donde:

$$M_{EQ} = \frac{L^2}{2} \left(m_A + m_B + \frac{2}{3} m_C + (m_B - m_A)(2 \cos^2 \theta_E - 1) \right) \quad (50)$$

$$B_{EQ} = \left[\frac{\left[\left(Ha + (L^2 - 2La) \cos \theta_E \right) \sin \theta_E \right]^2}{\rho_E^2} \right] b \quad (51)$$

$$K_{EQ} = FL - LgmB + \frac{1}{2} mC \sin \theta_E + \left(\frac{Ha \cos \theta_E + (L^2 - 2La)(\cos^2 \theta_E - \sin^2 \theta_E)(\rho_E - l_{ND})}{\rho_E} + \left[\frac{\left(Ha + (L^2 - 2La) \cos \theta_E \right) \sin \theta_E \right]^2 l_{ND}}{\rho_E^3} \right) k \quad (52)$$

$$\rho_E = \sqrt{a^2 + H^2 - 2aH \cos \theta_E + (L^2 - 2La) \sin^2 \theta_E} \quad (53)$$

a la cual se le conoce como ecuación perturbada, y representa las oscilaciones del sistema alrededor de la configuración de equilibrio. Cada coeficiente de la ecuación (49) depende de la configuración de equilibrio estático del mecanismo, la cual se representa mediante θ_E . Entonces, dependiendo de la configuración de equilibrio estático que se tenga, será el movimiento vibratorio subyacente.

Frecuencia natural y razón de amortiguamiento.

En el análisis de fenómenos vibratorios resulta de interés encontrar la frecuencia natural y la razón de amortiguamiento. Partiendo de la teoría de ecuaciones diferenciales de segundo orden [5], se determina la frecuencia natural así como la razón de amortiguamiento del sistema.

Por un lado, la frecuencia natural está dada por [5]:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{EQ}}{M_{EQ}}} \quad (54)$$

Por otro lado, la razón de amortiguamiento asociada con el caso de estudio se puede calcular mediante la siguiente expresión [5]:

$$\zeta = \frac{B_{EQ}}{2\omega_n M_{EQ}} \quad (55)$$

Debe notarse que los diferentes parámetros involucrados en las expresiones (54) y (55) están asociados con la ecuación (49), la cual sirve para describir el movimiento vibratorio del mecanismo bajo estudio.

Ejemplo numérico.

Con el fin de ilustrar de manera numérica el análisis presentado en este trabajo, se consideran las dimensiones y parámetros del sistema utilizados como ejemplo por Doughty [2], los cuales se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2 – Parámetros del sistema.

Parámetro	Valor, unidades
H	0.18 m
L	0.9 m
a	0.135 m
m_A	0.194 kg
m_B	0.143 kg
m_C	9.124 kg
k	3500 N/m
b	875 N-s/m
l_{ND}	0.15 m
F	110 N

Primeramente, resolviendo la ecuación (45) para θ_E , se obtienen las posiciones de equilibrio estático que aparecen en la primera columna de la Tabla 3.

Por otro lado, a partir de las ecuaciones (50)–(53) se pueden calcular los coeficientes característicos asociados con la ecuación (49), es decir, M_{EQ} , B_{EQ} y K_{EQ} . Sustituyendo estos coeficientes en las ecuaciones (54) y (55), se puede obtener la correspondiente frecuencia natural, además de la razón de amortiguamiento resultante. En las dos últimas columnas de la Tabla 3 se muestran los resultados correspondientes.

Tabla 3 –Resultados

θ_E (°)	M_{EQ} (kg·m ²)	B_{EQ} (N·s/m)	K_{EQ} (N/m)	ω_n (rad/s)	ζ
12.4726	2.5812	460.2193	1858.6	26.8338	3.3222
-8.8980	2.5803	442.1185	1722.8	25.8393	3.3156
-0.7032	2.5793	21.7938	-4397	41.2883i	-0.1023i
-92.3711	2.6205	0.0010	-1660.8	25.1746i	-7.5911e-6i
176.715	2.5794	8.3490	1015.2	19.8388	0.0816
92.5475	2.6205	0.0011	-1545.4	24.2839i	-9.0193e-6i
-92.3977	2.6205	4.7371e-4	-1660.7	25.1739i	-3.5904e-6i
178.8249	2.5793	1.0893	998.3735	19.6740	0.0107
0.3688	2.5793	6.1843	-4704.9	42.7093i	-0.0281i
92.5174	2.6205	5.1535e-4	-1545.5	24.2848i	-4.0490e-6i

De los datos obtenidos de la Tabla 3, los resultados de las tres primeras posiciones de equilibrio concuerdan con los obtenidos por Doughty [2].

Conclusiones

Basándose en los diferentes aspectos presentados en este artículo, se puede concluir que:

1. Un diagrama cinemático auxiliar permite combinar sistemáticamente el análisis cinemático y el análisis cinético de sistemas mecánicos.
2. Cuando las coordenadas generalizadas no son independientes entre sí, un análisis cinemático detallado simplifica la eliminación de variables y permite obtener ecuaciones de movimiento más simples.
3. Mediante la metodología presentada se pueden obtener las correspondientes ecuaciones de equilibrio estático en forma cerrada.
4. Debido a un análisis detallado de la cinemática y de la cinética se pudieron obtener diez configuraciones estáticas reales (y dos imaginarias), en lugar de las tres reportadas en [2]. Además, el procedimiento reportado en [2] está restringido a sistemas de un solo grado de libertad, y no indica una serie de pasos ordenados sistemáticamente para obtener los resultados.

Dada la naturaleza sistemática y ordenada de la metodología aquí presentada, y, dado el número considerable de ejemplos en los que los autores la han aplicado exitosamente, se considera que ésta pueda aplicarse con relativa facilidad al análisis del fenómeno vibratorio asociado con sistemas mecánicos multicuerpo más complejos.

Referencias

- [1] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, Sixth Edition, Pearson Education, Inc., p. 39 (2018).
- [2] S. Doughty, *Single degree of freedom mechanism vibration near equilibrium*. Mechanism and Machine Theory, 31 (1996) 339.
- [3] J. Angeles, *Dynamic Response of Linear Mechanical Systems*, Springer, pp. 34-49 (2011).
- [4] J. Angeles, *Fundamentals of robotic mechanical systems*. New York: Springer-Verlag (2014).
- [5] B. Balachandran, E. B. Magrab, *Vibrations*. Thompson Learning, Inc., p. 89 (2004).