

# Síntesis cinemática de mecanismo Stephenson I para generación de movimiento como problema de optimización multiobjetivo

## Kinematic synthesis of Stephenson I mechanism for motion generation as a multi-objective optimization problem

Diana Berenice Martínez-Terán<sup>a\*</sup>, Francisco Cuenca-Jiménez<sup>a</sup>, Eusebio Jiménez-Lopez<sup>b</sup>, Fernando Velázquez-Villegas<sup>a</sup>, Ricardo Yáñez-Valdez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3004, Copilco Universidad, Coyoacán, CDMX, C.P. 04510,

<sup>b</sup>Depto. de Ingeniería y Tecnología, Universidad La Salle Noreste, calle Veracruz 1800 Norte, Colonia Obregón Norte, Cd. Obregón Sonora, C.P. 85019,

\*diana.mteran@hotmail.com

### Resumen

En este artículo se sintetiza el mecanismo plano de seis barras de Stephenson I que satisface condiciones de posición, velocidad y aceleración en tres puntos para el problema de generación de movimiento, considerando una velocidad y aceleración angulares únicas para la manivela. Se plantearon las ecuaciones de síntesis mediante el método vectorial, y estas se resolvieron como un problema de optimización multiobjetivo, aplicando el método de la suma ponderada con la combinación convexa de funciones, normalizando las funciones objetivo y usando el enfoque de cota superior e inferior y el máximo de Pareto, así como el máximo absoluto. Lo anterior permitió que el punto a conducir del mecanismo lograra posicionarse de forma aproximada con respecto a los valores deseados, sintetizando mecanismos compactos con una manivela única que da giros continuos.

### Abstract

In this paper a planar six-bar Stephenson I mechanism is synthesized which satisfies position, velocity, and acceleration conditions in three points for the motion generation problem, considering a unique angular velocity and acceleration for the crank. The synthesis equations were formulated by the vector method, and they were solved as a multiobjective optimization problem, applying the weighted sum method and the convex function combination, normalizing the objective functions and using the upper-lower bound approach and the Pareto maximum, and the absolute maximum as well. This enabled the driving point of the mechanism to be positioned approximately with respect to the desired values, synthesizing compact mechanisms with a unique crank that is able to rotate continuously.

### Palabras clave:

Mecanismo Stephenson I, síntesis, generación de movimiento, optimización multiobjetivo, transformación de funciones

### Keywords:

Stephenson I mechanism, synthesis, motion generation, multiobjective optimization, function transformation

### Introducción

El diseño cinemático de mecanismos es un proceso que involucra dos rubros importantes: síntesis y análisis [1]. El proceso de síntesis provee las dimensiones de un mecanismo, y en el proceso de análisis se encuentra la diferencia entre el comportamiento deseado (puntos de precisión) y el generado (puntos calculados), conocida como error estructural. Para poder minimizar el error estructural y hallar el mecanismo con el mejor rendimiento, se suelen utilizar métodos de optimización [2]. Dentro de la función de error estructural se encuentran involucradas condiciones de diseño, que representan los objetivos que se buscan satisfacer, y a esto se le conoce como un problema de optimización multiobjetivo.

Gran parte de la investigación de la optimización multiobjetivo ha usado el método de suma ponderada [3] y la aplicación de la computación evolutiva para resolver problemas de optimización multiobjetivo con dos o tres objetivos o funciones [4]. Un problema de optimización multiobjetivo se refiere a un problema para optimizar dos o más funciones simultáneamente, las cuales son normalmente conflictivas entre

ellas [5]. Sin embargo, los valores de las diferentes funciones pueden tener diferentes unidades y/o distintos órdenes de magnitud significativos, por lo que, es usualmente necesario transformar las funciones objetivo de tal manera que todas tengan órdenes de magnitud similares [6]. Un tema de interés en la síntesis de mecanismos planos es la síntesis con condiciones de posición, velocidad y/o aceleración.

De acuerdo con trabajos anteriores, se ha buscado resolver la síntesis de mecanismos basados en diadas [10], de cuatro [7, 8, 11 – 14, 16], o seis barras [9, 15], con condiciones de posición [9], posición y velocidad [7, 10, 13, 14, 16] posición, velocidad y aceleración [8, 12, 15], aplicados a la generación de función [8], generación de trayectoria [7], detenciones simples y múltiples [9], conducción de cuerpo rígido [11], buscando el contacto de un cuerpo conducido con otros objetos [12], y considerando el objetivo de sintetizar mecanismos libres de colisiones [15]. De todos estos trabajos, los que utilizaron métodos de optimización aplicados a los mecanismos, pocos hablan de la necesidad de normalizar

funciones al utilizar objetivos de diferente naturaleza y no se menciona la síntesis con condiciones de posición, velocidad y aceleración lineal y angular en 3 puntos de precisión aplicados a mecanismos de seis barras.

En el presente artículo, se desarrolla el problema de síntesis del mecanismo de seis barras de Stephenson I para la generación del movimiento considerando tres datos de posición, tres de velocidad y tres de aceleración lineales y angulares en el plano, así como una velocidad y aceleración únicas para la manivela. Este será resuelto como un problema de optimización multiobjetivo mediante la transformación de funciones, con la finalidad de que las funciones objetivo tengan unidades y órdenes de magnitud similares, además de que se presenta una propuesta de selección de valores para definir los máximos de Pareto y absoluto, debido a la dependencia de las ecuaciones de síntesis de aceleración con variables de posición y velocidad.

**Conceptos cinemáticos.**

**Ecuación de posición**

En la Fig. 1, se muestra una base fija ( $I_0, J_0$ ) y una base móvil ( $i_1, j_1$ ), tal que la posición de un punto  $P$  se define:

$$P = R(\theta) p \tag{1}$$

Donde:

$$\begin{aligned} P &= [X, Y]^T, \\ p &= [x, y]^T \\ R(\theta) &= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Aquí,  $c\theta = \cos\theta$  y  $s\theta = \sin\theta$ . Ver Apéndice A para el desarrollo de  $R(\theta)$ .

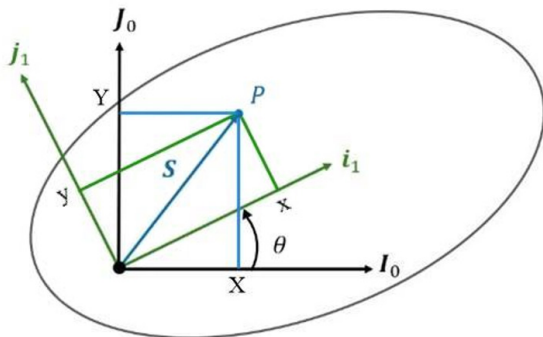


Figura 1 – Base inercial y base local.

**Ecuación de velocidad**

Para obtener la velocidad se deriva con respecto al tiempo la ec. (1):

$$\dot{P} = \dot{R}(\theta) \dot{p} + R(\theta) \dot{p} \tag{3}$$

De la ec. (1) se tiene que  $p = R(\theta)^T P$ , sustituyendo en la ec. (3) para obtener la definición en  $P$ :

$$V = W(\dot{\theta}) P + R(\theta) v \tag{4}$$

Donde  $V = \dot{P}$ ,  $v = \dot{p}$  y  $W(\dot{\theta})$  es la matriz de velocidad angular, tal que:

$$W(\dot{\theta}) = \dot{R}(\theta) R(\theta)^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Además de la ec. (5) se tiene:

$$\dot{R}(\theta) = W(\dot{\theta}) R(\theta) \tag{6}$$

**Ecuación de aceleración**

Para obtener la aceleración se deriva la ec. (4) con respecto al tiempo:

$$\dot{V} = \dot{W}(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) P + W(\dot{\theta}) \dot{P} + \dot{R}(\theta) v + R(\theta) \dot{v} \tag{7}$$

Derivando con respecto al tiempo la ec. (5) y sustituyendo en las ecs. (4) y (6) se obtiene:

$$A = H(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) P + 2W(\dot{\theta}) R(\theta) v + R(\theta) a \tag{8}$$

Donde  $A = \dot{V}$ ,  $a = \dot{v}$  y  $H(\dot{\theta}, \ddot{\theta})$  es la matriz de aceleración angular, tal que:

$$H(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \dot{W}(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) R(\theta)^T = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta} & -\dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta}^2 & -\ddot{\theta} \end{bmatrix} \tag{9}$$

**Ecuaciones de síntesis**

El análisis de posición de mecanismos crea lazos vectoriales y los eslabones se representan como vectores de posición. El análisis cinemático establece ecuaciones de posición, velocidad y aceleración para el estudio continuo del movimiento. El problema de síntesis puede ser planteado como un problema de análisis cinemático discreto, es decir, se establecen ecuaciones de posición, velocidad y aceleración para  $j$  puntos arbitrarios del movimiento del mecanismo. En la Fig. 2 se muestra el mecanismo de Stephenson I. Las ecuaciones de síntesis de posición ( $P_{Sin}$ ) se establecen como:

$$P_{Sin1j} = P_0 + P_{1j} + P_{2j} - P_{pj} = 0 \tag{10}$$

$$P_{Sin2j} = P_0 + P_{1j} + P'_{2j} - P_{3j} - P'_{4j} - P'_0 = 0 \tag{11}$$



**Enfoque de cota superior e inferior**

La función transformada tiene la forma:

$$F_i^{trans} = \frac{F_i(x) - F_i^0}{F_i^{max} - F_i^0} \tag{24}$$

Donde:

$F_i(x)$ : Representa la  $i$ -ésima función objetivo.

$F_i^0$ :  $\text{mínimo}_x \{F_i(x) \mid x \in X\}$

$F_i^{max}$ :  $\text{máximo}_x \{F_i(x) \mid x \in X\}$

$F_i^{trans}$ : Representa a la función  $i$ -ésima transformada.

Generalmente  $F_i^{trans}$  tiene un valor entre 0 y 1 dependiendo de la exactitud con que se determinan  $F_i^{max}$  y  $F_i^0$ .  $F_i^{max}$  puede ser determinado como el máximo absoluto (si este existe) de  $F_i(x)$  o como una aproximación del máximo [17].

Así la función objetivo tomará las siguientes formas usando el máximo de Pareto descrito en la ec. (25) y el máximo absoluto representado en la ec. (26):

$$UN_P = \sum_{i=1}^k w_i \left( \frac{F_i(x) - F_i^0}{F_i^{maxP} - F_i^0} \right) \tag{25}$$

$$UN_A = \sum_{i=1}^k w_i \left( \frac{F_i(x) - F_i^0}{F_i^{maxA} - F_i^0} \right) \tag{26}$$

**Síntesis del mecanismo de Stephenson I con condiciones de posición, velocidad y aceleración.**

Se desea sintetizar un mecanismo de seis barras de Stephenson tipo I para las siguientes condiciones:  $(P_{pj}, \phi_j, V_{pj}, \dot{\phi}_j, A_{pj}, \ddot{\phi}_j)$ . Donde  $(P_{pj}, V_{pj}, A_{pj})$  y  $(\phi_j, \dot{\phi}_j, \ddot{\phi}_j)$  representan la posición, velocidad y aceleración lineal y angular, respectivamente. En la Tabla 1 se muestran los datos a satisfacer para tres posiciones.

El ángulo de la manivela  $\phi_{4j}$  se define como:

$$\phi_{4j} = \phi_{41} + \Delta\phi_{4j} \quad j = 2, 3, 4, \dots, n \tag{27}$$

Donde  $j$  indica el número de puntos de precisión. La velocidad y aceleración angular de la manivela son:

$$\dot{\phi}_{4j} = 2\pi \text{ rad} / s \tag{28}$$

$$\ddot{\phi}_{4j} = 0 \tag{29}$$

A partir de las ecuaciones de síntesis planteadas se forman las funciones objetivo.  $F_1$  es la función objetivo de la posición,  $F_2$  de la velocidad y  $F_3$  de la aceleración:

$$F_1 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (P_{Sin jkx}^2 + P_{Sin jky}^2) \tag{30}$$

$$F_2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (V_{Sin jkx}^2 + V_{Sin jky}^2) \tag{31}$$

$$F_3 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (A_{Sin jkx}^2 + A_{Sin jky}^2) \tag{32}$$

Se transforman las funciones, siguiendo el siguiente procedimiento.

- Minimizar cada una de las funciones  $F_i(x)$  sujetas a las restricciones.

Al utilizar la función *FindMinimum* de *Mathematica* se minimiza la función  $F_1$  con las siguientes restricciones:

**Tabla 1** – Datos para la síntesis.

Dato	Valor
<b>Posición 1</b>	
$(x_{p1}, y_{p1})$	(2.066, 10.051) cm
$(\dot{x}_{p1}, \dot{y}_{p1})$	(7.467, 10.099) cm/s
$(\ddot{x}_{p1}, \ddot{y}_{p1})$	(140.701, 148.738) cm/s <sup>2</sup>
$\phi_{21}$	180.965°
$\dot{\phi}_{21}$	-0.601 rad/s
$\ddot{\phi}_{21}$	-8.958 rad/s <sup>2</sup>
<b>Posición 2</b>	
$(x_{p2}, y_{p2})$	(2.066, 10.051) cm
$(\dot{x}_{p2}, \dot{y}_{p2})$	(7.467, 10.099) cm/s
$(\ddot{x}_{p2}, \ddot{y}_{p2})$	(140.701, 148.738) cm/s <sup>2</sup>
$\phi_{22}$	180.965°
$\dot{\phi}_{22}$	-0.601 rad/s
$\ddot{\phi}_{22}$	-8.958 rad/s <sup>2</sup>
<b>Posición 3</b>	
$(x_{p3}, y_{p3})$	(2.066, 10.051) cm
$(\dot{x}_{p3}, \dot{y}_{p3})$	(7.467, 10.099) cm/s
$(\ddot{x}_{p3}, \ddot{y}_{p3})$	(140.701, 148.738) cm/s <sup>2</sup>
$\phi_{23}$	180.965°
$\dot{\phi}_{23}$	-0.601 rad/s
$\ddot{\phi}_{23}$	-8.958 rad/s <sup>2</sup>

- Restricciones de posición de pernos y longitud de barras. Para sintetizar mecanismos compactos

$$\begin{aligned} 7 \leq x_0 \leq 15, & \quad 2 \leq y_0 \leq 5, \quad 12 \leq x'_0 \leq 17, \\ 1 \leq y'_0 \leq 4, & \quad 7 \leq x_1 \leq 8, \quad 5 \leq x'_1 \leq 6, \\ 6 \leq x_2 \leq 7, & \quad 6 \leq x'_2 \leq 7, \quad 8 \leq x_3 \leq 9, \\ 1 \leq x_4 \leq 2, & \quad 1 \leq x'_4 \leq 2, \quad 7 \leq x_5 \leq 8 \end{aligned}$$

- Condición de Grashof. Para sintetizar mecanismos con una sola manivela.

$$x_4 + x_5 \leq x'_1 + \sqrt{(x_0 - x'_x)^2 + (y_0 - y'_0)^2} \tag{33}$$

- Condición del ángulo para la manivela.

$$\Delta\phi_{42} < \Delta\phi_{43} \tag{34}$$

Las incógnitas son  $(x_0, y_0, x'_0, y'_0, x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x_4, x'_4, x_5, \phi_{1j}, \phi_{3j}, \phi_{41}, \phi_{5j}, \Delta\phi_{42}, \Delta\phi_{43})$ . Los resultados del proceso de minimización de  $F_1$  se representan como sigue:

$$x_1^{*-} = \{R_1^-, \{P_1^-\}\} \tag{35}$$

Donde  $R_1^-$  representa al residual de la función y  $P_1^-$  contiene los valores de las incógnitas de posición. Para minimizar la función  $F_2$  se utilizan las restricciones usadas para minimizar a  $F_1$  y se añaden las siguientes:

- Restricciones de velocidad angular de las barras 1, 3 y 5.

$$\begin{aligned} -5 \leq \dot{\phi}_{1j} \leq 5, -5 \leq \dot{\phi}_{3j} \leq 5, \\ -5 \leq \dot{\phi}_{5j} \leq 5 \end{aligned} \tag{36}$$

Las incógnitas son las mismas de  $F_1$  y se añaden las siguientes:  $(\dot{\phi}_{1j}, \dot{\phi}_{3j}, \dot{\phi}_{5j})$ . Los resultados del proceso de minimización de  $F_2$  se representan como sigue:

$$x_2^* = \{R_2^-, \{P_2^-, V_2^-\}\} \tag{37}$$

Donde  $R_2^-$  representa el residual de la función,  $P_2^-$  contiene los valores de las incógnitas de posición, y  $V_2^-$  contiene los valores de las incógnitas de velocidad.

Para minimizar la función  $F_3$  se emplean las restricciones usadas para minimizar a  $F_1$  y  $F_2$ , y se añaden las siguientes:

- Restricciones de aceleración angular de las barras 1, 3 y 5.

$$\begin{aligned} -50 \leq \ddot{\phi}_{1j} \leq 50, -50 \leq \ddot{\phi}_{3j} \leq 50, \\ -50 \leq \ddot{\phi}_{5j} \leq 50 \end{aligned} \tag{38}$$

Las incógnitas son las mismas de  $F_2$  y se añaden las siguientes:  $(\ddot{\phi}_{1j}, \ddot{\phi}_{3j}, \ddot{\phi}_{5j})$ . Los resultados del proceso de minimización de  $F_3$  se representan como sigue:

$$x_3^* = \{R_3^-, \{P_3^-, V_3^-, A_3^-\}\} \tag{39}$$

Donde  $R_3^-$  representa al residual de la función,  $P_3^-$  contiene los valores de las incógnitas de posición,  $V_3^-$  contiene los valores de las incógnitas de velocidad, y  $A_3^-$  contiene los valores que toman las incógnitas de aceleración.

- Maximizar cada una de las funciones  $F_i(x)$  sujetas a las restricciones.

Para maximizar las funciones, se aplica el mismo proceso descrito en el punto anterior, la única diferencia es que se usa la función *FindMaximum* de *Mathematica*. Los resultados del proceso de maximización de las funciones se representan como sigue:

$$x_1^{*+} = \{R_1^+, \{P_1^+\}\} \tag{40}$$

$$x_2^{*+} = \{R_2^+, \{P_2^+, V_2^+\}\} \tag{41}$$

$$x_3^{*+} = \{R_3^+, \{P_3^+, V_3^+, A_3^+\}\} \tag{42}$$

Donde  $R_1^+, R_2^+, R_3^+$ , representan a los residuales de las funciones  $F_1, F_2, F_3$ , respectivamente,  $P_1^+, P_2^+, P_3^+$ , contienen los valores de las incógnitas de posición de las funciones  $F_1, F_2, F_3$ ,  $V_2^+, V_3^+$ , contienen los valores de las incógnitas de velocidad de las funciones  $F_2, F_3$  y  $A_3^+$  contiene los valores de las incógnitas de aceleración de  $F_3$ .

- Formar una matriz de comparación de funciones, realizando la evaluación de las funciones  $F_i(x)$  con los valores que minimizan y maximizan a cada una.

La función  $F_1$  depende de la posición, es decir,  $F_1=F(P)$ . La función  $F_2$  depende de la posición y velocidad, es decir,  $F_2=F(P, V)$ . La función  $F_3$  depende de la posición, velocidad y aceleración, es decir,  $F_3=F(P, V, A)$ .

En la Tabla 2, la fila 1 corresponde a la evaluación de las funciones  $F_1, F_2, F_3$  con los valores que minimizan a  $F_1(x_1^{*-}), F_2(x_2^{*-}), F_3(x_3^{*-})$ . La fila 2 corresponde a la evaluación de las funciones  $F_1, F_2, F_3$  con los valores que minimizan a  $F_2(x_2^{*-}), F_3(x_3^{*-})$ . La fila 3 corresponde a la evaluación de las funciones  $F_1, F_2, F_3$  con los valores que minimizan a  $F_3(x_3^{*-})$ . La fila 4 corresponde a la evaluación de  $F_1, F_2, F_3$  con los valores que maximizan a cada una, es decir, se evalúa a  $F_1$  con  $x_1^{*+}, F_2$  con  $x_2^{*+}, F_3$  con  $x_3^{*+}$ .

Se sustituyen los valores de  $(x_1^{*-}, x_2^{*-}, x_3^{*-})$  y  $(x_1^{*+}, x_2^{*+}, x_3^{*+})$  en la Tabla 3.

**Tabla 2** – Matriz de comparación de funciones simbólica.

Solución de las funciones	Valor de $F_1$	Valor de $F_2$	Valor de $F_3$
$x_1^{*-}, (x_2^{*-}, x_3^{*-})$	$F_1(P_1^-)$	$F_2(P_1^-, V_2^-)$	$F_3(P_1^-, V_3^-, A_3^-)$
$x_2^{*-}, (x_3^{*-})$	$F_1(P_2^-)$	$F_2(P_2^-, V_2^-)$	$F_3(P_2^-, V_2^-, A_3^-)$
$x_3^{*-}$	$F_1(P_3^-)$	$F_2(P_3^-, V_3^-)$	$F_3(P_3^-, V_3^-, A_3^-)$
$x_1^{*+}, x_2^{*+}, x_3^{*+}$	$F_1(P_1^+)$	$F_2(P_2^+, V_2^+)$	$F_3(P_3^+, V_3^+, A_3^+)$



**Tabla 3** – Matriz de comparación de funciones numérica.

Solución de las funciones	Valor de $F_1$	Valor de $F_2$	Valor de $F_3$
$x_1^+, (x_2^+, x_3^+)$	0.0003	3713.28	462554
$x_2^+ (x_3^+)$	1204.18	$7.4 \times 10^{-15}$	181221
$x_3^+$	970.994	5742.93	$6.1 \times 10^{-12}$
$x_1^{++}, x_2^{++}, x_3^{++}$	5911.52	58122.3	$6.5 \times 10^{-6}$

Se determinan a los mínimos como los datos obtenidos al evaluar  $F_1$  con  $x_1^+$ ,  $F_2$  con  $x_2^+$  y  $F_3$  con  $x_3^+$ , llamados  $F_{10}$ ,  $F_{20}$ ,  $F_{30}$  en la Tabla 4.

Se determinan a los máximos absolutos como los datos obtenidos al evaluar  $F_1$  con  $x_1^{++}$ ,  $F_2$  con  $x_2^{++}$  y  $F_3$  con  $x_3^{++}$ , llamados  $F_1^{máxA}$ ,  $F_2^{máxA}$ ,  $F_3^{máxA}$  en la Tabla 4.

Para determinar los máximos de Pareto se toma la evaluación con los valores que no la minimizan, es decir,  $F_1$  con  $x_2^+$  y  $x_3^+$ ,  $F_2$  con  $x_1^+$  y  $x_3^+$ , y  $F_3$  con  $x_1^+$  y  $x_2^+$ , y de cada par de valores, se elige el mayor y a este se le denomina máximo de Pareto, que están representados por:  $F_1^{máxP}$ ,  $F_2^{máxP}$ ,  $F_3^{máxP}$  en la Tabla 4.

**Tabla 4** – Matriz de comparación de funciones esquemática.

Solución de las funciones	Valor de $F_1$	Valor de $F_2$	Valor de $F_3$
$x_1^+, (x_2^+, x_3^+)$	$F_{10}$	$F_{v2}$	$F_3^{máxP}$
$x_2^+ (x_3^+)$	$F_1^{máxP}$	$F_{20}$	$F_{v3}$
$x_3^+$	$F_{v1}$	$F_2^{máxP}$	$F_{30}$
$x_1^{++}, x_2^{++}, x_3^{++}$	$F_1^{máxA}$	$F_2^{máxA}$	$F_3^{máxA}$

- Para normalizar la función se usan los criterios:
- Aproximación acotada con el máximo de Pareto y el uso de la combinación convexa de funciones (ecs. (25) y (23)). Se asignan arbitrariamente los siguientes pesos para cada función:

$w_1=0.8$  (posición)

$w_2=0.1$ (velocidad)

$w_3=0.1$ (aceleración)

Para resolver las ecuaciones de síntesis se sustituyen las ecs. (30) – (32) en la ec. (25) y se usa la función *FindMinimum de Mathematica*, utilizando las restricciones:

- Restricciones de longitud de barras. Se establecieron a criterio libre para diseñar mecanismos compactos.

$7 \leq x_1 \leq 10, 5 \leq x'_1 \leq 8, 6 \leq x_2 \leq 8,$

$6 \leq x'_2 \leq 12, 8 \leq x_3 \leq 10, 1 \leq x_4 \leq 2,$

$1 \leq x'_4 \leq 2, 5 \leq x_5 \leq 9$

También se usó la condición de Grashof y la condición del ángulo para la manivela, cabe mencionar que estas condiciones fueron planteadas en el proceso de minimización y maximización de las funciones.

Las incógnitas son:  $(x_0, y_0, x'_0, y'_0, x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x_4, x'_4, x_5, \phi_{1j}, \phi_{3j}, \phi_{41}, \phi_{5j}, \Delta\phi_{42}, \Delta\phi_{43}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \phi_{1j}, \phi_{3j}, \phi_{5j}, \dot{\phi}_{1j}, \dot{\phi}_{3j}, \dot{\phi}_{5j})$

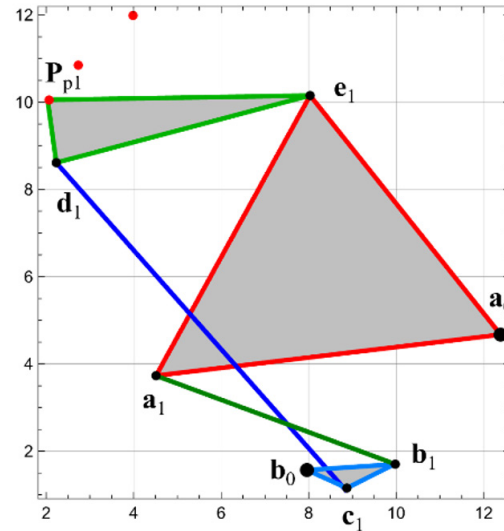
- Aproximación acotada con el máximo absoluto y el uso de la combinación convexa de funciones (ecs. (26) y (23)).

Para resolver las ecuaciones de síntesis se sustituyen las ecs. (30) – (32) en la ec. (26), y se utiliza la función *FindMinimum de Mathematica*, y se usan las restricciones descritas con el uso del máximo de Pareto, así también, las incógnitas son las mismas presentadas anteriormente.

**Resultados**

*Aproximación acotada con el máximo de Pareto y el uso de la combinación convexa de funciones*

El mecanismo sintetizado se muestra en la Fig. 3.



**Figura 3** – Mecanismo sintetizado con el máximo de Pareto.

Y las dimensiones obtenidas para un valor de la ec. (25)  $UN_p=0.0000729403$  son:

$x_0=12.38, y_0=4.67, x'_0=7.96, y'_0=1.56,$

$x_1=7.00, x'_1=7.93, x_2=6.00, x'_2=6.00,$

$x_3=9.99, x_4=1.99, x'_4=1.00, x_5=5.83,$

$\phi_{41}=3.74^\circ, \beta_1=58.34^\circ, \beta_2=13.89^\circ, \beta_4=28.08^\circ$

En las Figs. 4(a), 4(b) y 4(c) se muestran en color azul las trayectorias angulares generadas por el cuerpo que contiene al punto *P* para posición, velocidad y aceleración, respectivamente, usando el máximo de Pareto. Los puntos rojos representan los datos deseados del punto *P* que el mecanismo necesita alcanzar. Se observa en la Fig. 4, que los datos deseados se encuentran muy aproximados a las trayectorias angulares.

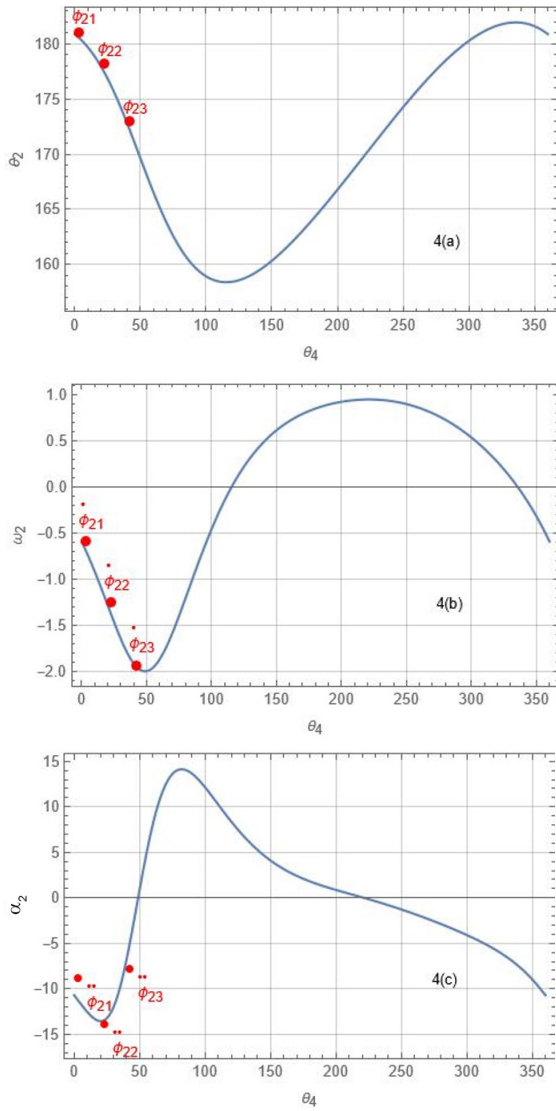


Figura 4 – trayectoria angular para (a) posición, (b) velocidad, (c) aceleración angular con máximo de Pareto.

En las Figs. 5(a), 5(b) y 5(c) se muestran en color azul las trayectorias lineales generadas por el punto  $P$  para posición, velocidad y aceleración, respectivamente, usando el máximo de Pareto. En la Fig. 5 los puntos rojos representan los datos deseados de  $P$  y se observa que los datos deseados se encuentran cerca de las trayectorias lineales.

Las gráficas son un indicativo de que mientras más cerca esté la línea azul de los puntos rojos el mecanismo cumple con la tarea requerida. Mientras más se aleja, el mecanismo pierde precisión y el error generado es más grande.

El controlar primeras y segundas derivadas en el proceso de síntesis, equivale a diseñar mecanismos con movimientos suaves, de esta manera las gráficas anteriores indican al diseñador la eficiencia del mecanismo al realizar la tarea, mediante la cercanía de las curvas azules con respecto a los puntos rojos de precisión que representan a los valores deseados.

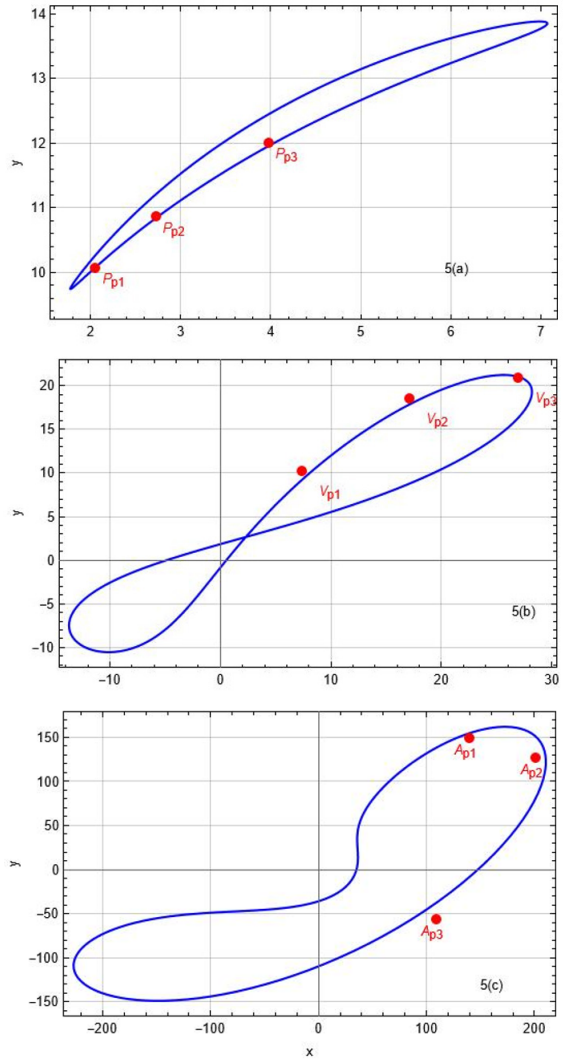


Figura 5 – Trayectoria lineal para (a) posición, (b) velocidad, (c) aceleración con máximo de Pareto.

En la Tabla 5 se muestran las diferencias encontradas entre los valores deseados y los valores obtenidos para posición lineal y en la Tabla 6 para posición angular.

Tabla 5 – Diferencia  $\Delta P_i$  con máximo de Pareto.

$P_i$ calculado	$P_i$ deseado	$\Delta P_i$
(2.06639, 10.0887)	(2.066, 10.051)	0.037
(2.76215, 10.8744)	(2.733, 10.849)	0.038
(3.97695, 11.9532)	(3.985, 11.988)	0.035

Tabla 6 – Diferencia  $\Delta \phi_{2i}$  con máximo de Pareto.

$\phi_{2i}$ calculado	$\phi_{2i}$ deseado	$\Delta \phi_{2i}$
180.882	189.965	0.083
177.952	178.075	0.122
173.075	172.882	0.192

En la posición lineal, la diferencia  $\Delta P_2$  muestra un error máximo de 0.04 centésimas; y en la posición angular, la diferencia  $\Delta \phi_{23}$  es de 0.2°, lo anterior muestra que se alcanzó un error estructural bajo en los puntos de precisión.

En la Tabla 7 se muestran las diferencias encontradas entre los valores deseados y los valores obtenidos para velocidad lineal y en la Tabla 8 para velocidad angular.

**Tabla 7** – Diferencia  $\Delta V_i$  con máximo de Pareto.

$V_i$ calculado	$V_i$ deseado	$\Delta V_i$
(7.85604, 9.7437)	(7.467, 10.099)	0.526
(17.8807, 18.3419)	(17.174, 18.43)	0.712
(27.1689, 20.9364)	(27.031, 20.844)	0.165

**Tabla 8** – Diferencia  $\Delta \dot{\phi}_{2i}$  con máximo de Pareto.

$\dot{\phi}_{2i}$ calculado	$\dot{\phi}_{2i}$ deseado	$\Delta \dot{\phi}_{2i}$
-0.589	-0.601	0.011
-1.279	-1.262	0.017
-1.893	-1.944	0.050

En la velocidad lineal, la diferencia  $\Delta V_2$  muestra el error máximo de 0.8 décimas; y en la velocidad angular, la diferencia máxima  $\Delta \dot{\phi}_{23}$  es de 0.05, lo anterior muestra que el mecanismo produce un movimiento suave en los puntos de precisión en cuanto a la velocidad.

En la Tabla 9 se muestran las diferencias encontradas entre los valores deseados y los valores obtenidos para aceleración lineal y en la Tabla 10 para aceleración angular.

En la aceleración lineal, la diferencia  $\Delta A_3$  muestra el error máximo de 15.3, y en la aceleración angular, la diferencia máxima  $\Delta \ddot{\phi}_{23}$  es de 0.42, lo anterior muestra que el mecanismo probablemente requiera de más barras para poder reducir las aceleraciones lineales, sin embargo, esta muestra un buen control de las aceleraciones angulares.

Lo anterior muestra que el mecanismo tiene un buen control de las aceleraciones angulares, sin embargo, este probablemente requiera de más barras para poder reducir las aceleraciones lineales, o también permitir que la manivela tenga aceleración angular distinta de cero y en último caso modificar las restricciones de longitud de barras inicialmente dadas.

**Tabla 9** – Diferencia  $\Delta A_i$  con máximo de Pareto.

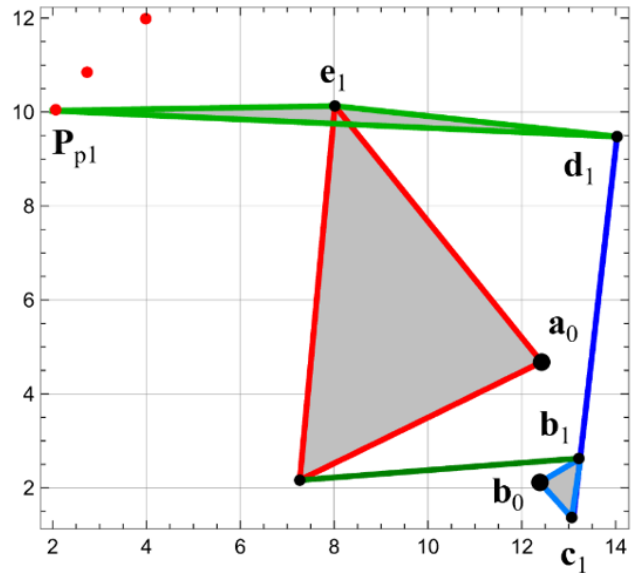
$A_i$ calculado	$A_i$ deseado	$\Delta A_i$
(139.889, 154.829)	(140.701, 148.738)	6.145
(210.121, 129.832)	(202.045, 126.347)	8.795
(98.4297, -46.7837)	(109.882, -57.017)	15.358

**Tabla 10** – Diferencia  $\Delta \ddot{\phi}_{23}$  con máximo de Pareto.

$\ddot{\phi}_{2i}$ calculado	$\ddot{\phi}_{2i}$ deseado	$\Delta \ddot{\phi}_{2i}$
-10.7104	-8.958	1.752
-13.5623	-13.98	0.417
-7.50692	-7.934	0.427

**Aproximación acotada con el máximo absoluto y el uso de la combinación convexa de funciones**

El mecanismo sintetizado se muestra en la Fig. 6.



**Figura 6** - Mecanismo sintetizado con el máximo absoluto.

Y las dimensiones obtenidas para un valor de la ec. (26)  $UN_A=0.0000235334$  son:

$$x_0 = 12.42, y_0 = 4.67, x'_0 = 12.38, y'_0 = 2.11,$$

$$x_1 = 7.01, x'_1 = 5.73, x_2 = 6.01, x'_2 = 6.05,$$

$$x_3 = 8.10, x_4 = 1.00, x'_4 = 1.00, x_5 = 5.96,$$

$$\phi_{41} = 30.5^\circ, \beta_1 = 77.0^\circ, \beta_2 = 172.8^\circ, \beta_4 = 101.5^\circ$$

En las Figs. 7(a), 7(b) y 7(c) se muestran las trayectorias angulares generadas por el cuerpo que contiene al punto  $P$  para posición, velocidad y aceleración, respectivamente, usando el máximo absoluto. Se puede observar que los puntos no se encuentran sobre ninguna de las trayectorias.

En las Figs. 8(a), 8(b) y 8(c) se muestran las trayectorias lineales generadas por el punto  $P$  para posición, velocidad y aceleración, respectivamente, usando el máximo absoluto. Se observa que los puntos se encuentran sobre la trayectoria en la posición, en tanto a las trayectorias de velocidad y aceleración, los puntos se encuentran muy cerca de ella.

En la Tabla 11 se muestran las diferencias encontradas entre los valores deseados y los valores obtenidos para posición lineal y en la Tabla 12 para posición angular.

**Tabla 11** – Diferencia  $\Delta P_i$  con máximo absoluto.

$P_i$ calculado	$P_i$ deseado	$\Delta P_i$
(1.90272, 9.9241)	(2.066, 10.051)	0.206
(2.63184, 10.7324)	(2.733, 10.849)	0.154
(4.34963, 12.2182)	(3.985, 11.988)	0.431



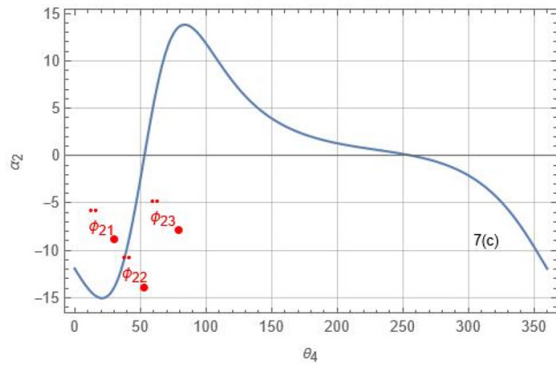
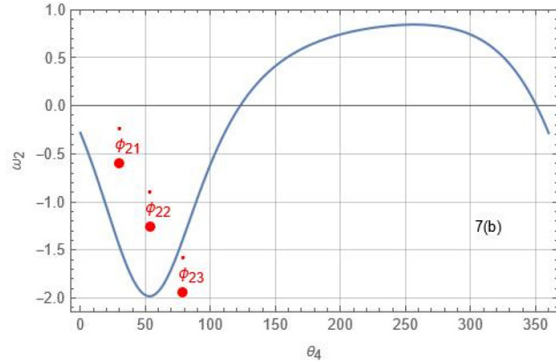
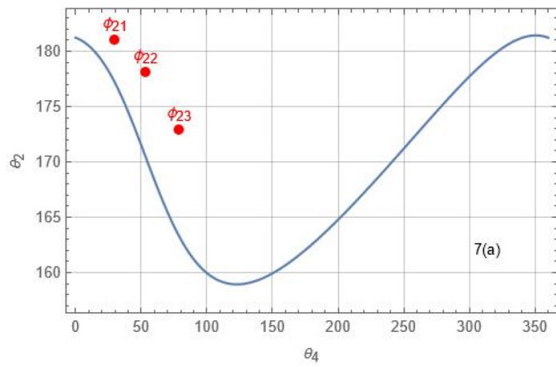


Figura 7 – Trayectoria angular para (a) posición, (b) velocidad, (c) aceleración con máximo absoluto.

Tabla 12 – Diferencia  $\Delta\phi_{2i}$  con máximo absoluto.

$\phi_{2i}$ calculado	$\phi_{2i}$ deseado	$\Delta\phi_{2i}$
181.215	180.965	0.250
178.608	178.075	0.532
171.817	172.882	1.065

En la posición lineal, la diferencia  $\Delta P_3$  muestra un error máximo de 0.43 décimas; y en la posición angular, la diferencia  $\Delta\phi_{23}$  es de 1.06°, lo anterior muestra que se alcanzó un error estructural bajo en los puntos de precisión. En la Tabla 13 se muestran las diferencias halladas entre los valores deseados y los obtenidos para velocidad lineal y en la Tabla 14 para velocidad angular.

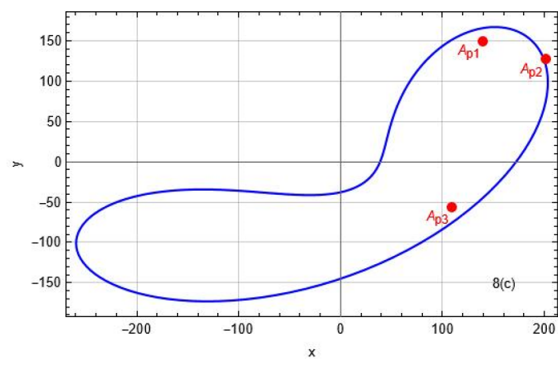
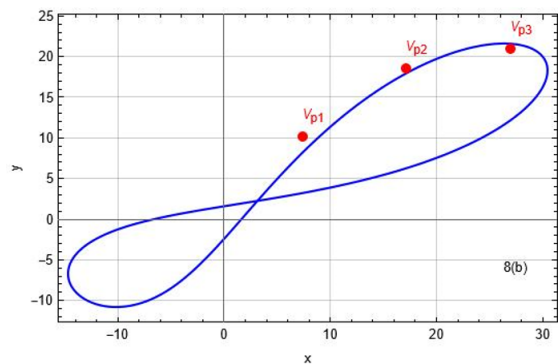
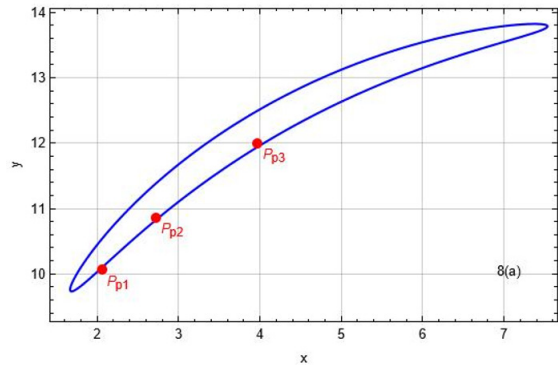


Figura 8 – Trayectoria lineal para (a) posición, (b) velocidad, (c) aceleración con máximo absoluto.

En la velocidad lineal, la diferencia  $\Delta V_1$  muestra el error máximo de 2.73 unidades; y en la velocidad angular, la diferencia máxima  $\Delta\dot{\phi}_{2i}$  es de 0.31, lo anterior muestra que el mecanismo produce un movimiento suave para la velocidad angular pero no en la lineal.

Tabla 13 – Diferencia  $\Delta V_i$  con máximo absoluto.

$V_i$ calculado	$V_i$ deseado	$\Delta V_i$
(6.81541, 7.44067)	(7.467, 10.099)	2.737
(16.8317, 17.719)	(17.174, 18.43)	0.789
(29.5763, 20.5205)	(27.031, 20.844)	2.565

Tabla 14 – Diferencia  $\Delta\dot{\phi}_{2i}$  con máximo absoluto.

$\dot{\phi}_{2i}$ calculado	$\dot{\phi}_{2i}$ deseado	$\Delta\dot{\phi}_{2i}$
-0.282	-0.601	0.318
-1.176	-1.262	0.085
-1.963	-1.944	0.019

En la Tabla 15 se muestran las diferencias halladas entre los valores deseados y los valores obtenidos para aceleración lineal y en la Tabla 16 para aceleración angular. En la aceleración lineal, la diferencia  $\Delta A_3$  muestra el error máximo de 38.38, y en la aceleración angular, la diferencia máxima  $\Delta \dot{\phi}_{23}$  es de 4.60, lo anterior muestra que la aceleración lineal no se satisface y la aceleración angular puede ser considerada aceptable.

**Tabla 15** – Diferencia  $\Delta A_i$  con máximo absoluto.

$A_i$ calculado	$A_i$ deseado	$\Delta A_i$
(119.058,157.568)	(140.701,148.738)	23.375
(193.744,140.948)	(202.045,126.347)	16.795
(91.5387,-90.7366)	(109.882,-57.017)	38.386

**Tabla 16** – Diferencia  $\Delta \ddot{\phi}_{2i}$  con máximo absoluto.

$\ddot{\phi}_{2i}$ calculado	$\ddot{\phi}_{2i}$ deseado	$\Delta \ddot{\phi}_{2i}$
-11.9363	-8.958	-2.978
-15.0046	-13.98	-1.024
-3.328	-7.934	4.606

A partir de las diferencias  $\Delta P_p$ ,  $\Delta V_p$ ,  $\Delta A_p$ ,  $\Delta \dot{\phi}_{2i}$ ,  $\Delta \ddot{\phi}_{2i}$ ,  $\Delta \dot{\phi}_{2i}$  calculadas se puede apreciar diferencias entre Pareto y absoluto, mostrando que los resultados usando el máximo de Pareto son los mejores para alcanzar los objetivos propuestos.

## Conclusiones

En este artículo se realizó la síntesis cinemática de un mecanismo Stephenson I empleando la transformación de funciones objetivo y el método de la suma ponderada con la combinación convexa de funciones, para alcanzar los objetivos de posición, velocidad y aceleración. Comparando los valores lineales máximos hallados,  $\Delta P_p$ , de 0.04 para Pareto y 0.43 para el absoluto se obtiene un porcentaje de variación de 90% a favor de Pareto. De manera similar, para la posición angular,  $\Delta \dot{\phi}_{2p}$ , de 0.2 para Pareto y 1.06 para absoluto, la variación es 81%, también a favor de Pareto. Para el caso de la velocidad lineal la variación es de 70%, y la angular de 83%. Finalmente, la variación en la aceleración lineal es de 60% y la angular es de 90%. Todas las anteriores a favor del máximo de Pareto, por lo que con esto concluimos que este proporcionó el mejor resultado entre ambos, siendo un diseño más apropiado para el control de movimiento.

Por último, se propuso una manera de seleccionar valores máximos y mínimos para formar la matriz de comparación de funciones y normalizar las funciones para un proble

## Agradecimientos

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo recibido para realizar estudios de maestría.

## Apéndice A

Obteniendo matriz de rotación  $R(\theta)$  de la ec. (2).

A partir de la Fig. 1, se define una base inercial ( $I_0, J_0$ ) fija a la tierra y una base local móvil ( $i_1, j_1$ ) unida a un cuerpo. La base inercial y local se expresan en sus respectivas bases como:

$$I_0 = [1, 0]^T, J_0 = [0, 1]^T \quad (A1)$$

$$i_0 = [1, 0]^T, j_0 = [0, 1]^T \quad (A2)$$

El vector  $S$  se define en ambas bases:

$$S = XI_0 + YJ_0 = xi_1 + yj_1 \quad (A3)$$

A partir de la Fig.1, la base local ( $i_1, j_1$ ) se expresa en función de la base inercial ( $I_0, J_0$ ):

$$i_1 = c\theta I_0 + s\theta J_0, j_1 = -s\theta I_0 + c\theta J_0 \quad (A4)$$

Donde  $c\theta = \cos\theta$  y  $s\theta = \sin\theta$ . Sustituyendo ec. (A4) en la ec. (A3) y usando ec. (A1):

$$XI_0 + YJ_0 = (xc\theta + ys\theta)I_0 + (xs\theta + yc\theta)J_0 \quad (A5)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xc\theta - ys\theta \\ xs\theta + yc\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (A6)$$

Renombrando:

$$P = R(\theta) p \quad (A7)$$

Donde:

$$P = [X, Y]^T, p = [x, y]^T \quad (A8)$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$

## REFERENCIAS

- [1] Avello, A. (2014). *Teoría de máquinas*. Segunda ed. Pamplona: Tecnun – Universidad de Navarra.
- [2] Cossalter, V., Doria, A., Pasini, M., Scattolo, C., (1992). *A simple numerical approach for optimum synthesis of a class of planar mechanisms*. Mechanism and Machine Theory, 27 (3), pp. 357-366.

- [3] Marler, R., Arora, J., (2009). *The weighted sum method for multi-objective optimization: new insights*. Structural and Multidisciplinary Optimization (4), pp. 853–862.
- [4] Sinha, A., Malo, P., Kallio, M., (2018). *Convex preference cone-based approach for many objective optimization problems*. Computers and Operations Research, 95, pp. 01-11.
- [5] He, C., Pan, L., Xu, H., Tian, Y., & Zhang, X., (2016). *An Improved Reference Point Sampling Method on Pareto Optimal Front*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Congress on Evolutionary Computation (CEC) Vancouver Canada, pp- 5230-5237.
- [6] Arora, J., (2012). *Introduction to Optimum Design*. Third ed. Oxford: Elsevier.
- [7] Shaefer, R., Kramer, S., (1979). *Selective Precision Synthesis of Planar Mechanisms Satisfying Position and Velocity Constraints*. Mechanism and Machine Theory, 14, pp. 161-170.
- [8] Guj, G., Dong, Z., Giacinto, M. (1981). *Dimensional synthesis of four bar linkage for function generation with velocity and acceleration constraints*. Meccanica, 16 (4), pp. 210-219.
- [9] Sandgren, E. (1985). *Design of single- and multiple-dwell six-link mechanisms through design optimization*. Mechanism and Machine Theory, 20 (6), pp. 483-490.
- [10] Holte, J., Chase, T., Erdman, A. (2001). *Approximate Velocities in Mixed Exact-Approximate Position Synthesis of Planar Mechanisms*. Journal of Mechanical Design, 123, pp. 388-394.
- [11] Robson, N., McCarthy, J (2005). *The synthesis of planar 4R linkages with three task positions and two specified velocities*. Proceedings of IDETC/CIE 2005, ASME International Design Engineering Technical Conferences, September 24–28, Long Beach, California, US.
- [12] Robson, N., McCarthy, J. (2007). *Kinematic synthesis with contact direction and curvature constraints on the workpiece*, Proceedings of ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences, 2007 IDETC/MECH, September 4–7, Las Vegas, Nevada, U.
- [13] Galeano, C., Duque, C., Garzón, D. (2009). *Aplicación de diseño óptimo dimensional a la síntesis de posición y velocidad en mecanismos de cuatro barras*. Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia, 47, pp. 129-144.
- [14] De Juan, A., Sancibrian, R., García, P., Viadero, F., Iglesias, M., Fernández, A. (2012). *Kinematic Synthesis for Linkages with Velocity Targets*. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 11-0768, pp. 472-483.
- [15] Chen, C., Liu, T., Huang, I., Chou, J (2012). *Multiobjective Synthesis of Six-Bar Mechanisms Under Manufacturing and Collision-Free Constraints*. IEEE Computational Intelligence Magazine, 1556-603X, pp.36-48.
- [16] Baskar, A., Bandyopadhyay, S. (2017). *An Exact Synthesis of Pick-and-Place Mechanisms Using a Planar Four-Bar Linkage*, National Conference on Machines & Mechanisms 2017, 13th to 15th Dec, Mumbai, India.
- [17] Marler, R. (2005). *A study of multi-objective optimization methods for engineering applications*. Doctoral thesis. University of Iowa.
- [18] Kim, I, Weck, O. (2006). *Adaptive weighted sum method for multiobjective optimization: a new method for Pareto front generation*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 31, pp. 105-116.