

# Errores Cinemáticos en Engranajes Cicloidales con Distancia entre Ejes Variable

Evgeny Podzharov<sup>1</sup>, Urzúa Cevallos Isidro Sarquís<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Guadalajara, Departamento de Ingeniería Mecánica Eléctrica

<sup>2</sup>Molinos Azteca y Juper, Departamento de Diseño

## Resumen

En el presente trabajo, se hizo un análisis de errores cinemáticos en engranajes cicloidales con distancia entre ejes variable, con el fin de evaluar la utilización de estos engranajes en molinos de agave o de caña. Los engranajes de perfil involuta no son susceptibles al cambio de la distancia entre ejes que sucede en los molinos. Pero hay problema de interferencia de dientes en el pie que ocurre cuando el número de dientes es pequeño, y el cambio de distancia entre ejes es relativamente grande, que tiene lugar en molinos de agave cuando la distancia entre ejes es de 20 pulgadas. Entre tanto, en engranajes cicloidales no hay interferencia en el pie del diente, se utiliza completamente la altura de este. No obstante estos engranajes son susceptibles al cambio de distancia entre ejes. En el caso de que haya este cambio surge error cinemático. Para la evaluación del error cinemático en engranajes cicloidales en este trabajo se propone un mecanismo de sustitución de seis barras y dos correderas que simula el embone de dientes de engranajes cicloidales. La solución de las ecuaciones de cierre de circuito mecánico de este mecanismo y su solución numérica mediante el método de Newton-Raphson permite evaluar el error cinemático en función de la separación de los ejes de engranajes. Este error no sobrepasa el 20% del valor nominal de la relación de velocidades, cuando la separación de los ejes es máxima, igual a dos pulgadas para molinos de agave de 20 pulgadas de diámetro de masas, y puede considerarse permisible, cuando las masas giran con baja velocidad, cerca de 7 r.p.m.

## Abstract

In this work an analysis of kinematic error in cycloidal gears with variable center distance has been done to evaluate their application in the cane and agave mills. The involute gears are not susceptible to the change of center distance that occurs in these mills. But there is a problem of teeth interference which occurs in mills involute gears when the number of teeth is small and the change of center distance is relatively large. This takes place in the agave mills with center distance equal 20 inches that does not permit to utilize completely the advantages of involute gears. Nevertheless the cycloidal gears never have interference in the tooth foot; the complete tooth height is in use. But these gears are susceptible to the change of center distance. In the case of change of center distance the kinematic error occurs. For evaluation of kinematic error in cycloidal gears a substitution mechanism of six bars and two slides is proposed in this work. It simulates teeth engagement in cycloidal gears. The composition of equations of closed mechanical circuit of this mechanism and their numerical solution by the method of Newton-Raphson let us evaluate the kinematic error as a function of gear axes separation. This error does not exceed 20% of the gear ratio when the separation of the axes is maximum, equal 2 inches for the agave mills with 20 inches center distance, and it can be considered permissible when the mills velocity is only 7 r.p.m.

## Keywords:

Design of cycloidal gears, kinematic error in cycloidal gears, gears with variable center distance, substitution mechanisms for cycloidal gears, gears of cane and agave mills.

## Palabras clave:

Diseño de engranajes cicloidales, error cinemático en engranajes cicloidales, engranajes con distancia entre ejes variable, mecanismo de sustitución de engranajes cicloidales, engranajes de molinos de caña y de agave.

## Nomenclatura

$a$	adendo
$b$	dedendo
$C$	distancia entre centros
$m_c$	relación de contacto
$N$	número de dientes
$R$	longitud del radio-vector de un punto en el perfil cicloidal
$r_g$	radio del círculo generador
$r_p$	radio del círculo de paso

$r_o$	radio del círculo exterior
$r_v$	relación de velocidades
$\rho$	radio de curvatura de perfil de dientes
$\theta_i$	ángulo de inclinación de la barra $i$ respecto al eje $x$
$\theta$	ángulo del radio-vector $R$
$\omega$	velocidad angular.

El subíndice "e" se refiere a la curva epicicloide y el subíndice "h" a la curva hipocicloide.

## Introducción

Los engranes cicloidales se conocen desde mucho antes que los engranes de perfil involuta. El uso de los últimos predomina en la maquinaria moderna, gracias a la facilidad de fabricación con herramientas que tienen filos rectos, no susceptibilidad al cambio o error de distancia entre ejes, Litvin, Fuentes (2004). Desde hace mucho tiempo en los molinos para caña se usan engranes (coronas) de perfil involuta. Según Molgora Castañeda (1976) el número de dientes para coronas de 16 y el ángulo de presión de 18° llegaron a ser casi estándares para molinos de caña. En realidad los parámetros óptimos de engranes con perfil involuta pueden ser escogidos independientemente del ángulo de presión. En Rusia, en la industria de aviación desde los años 60 se usa el diseño de engranes de perfil involuta no estándares en parámetros generalizados, (Vulgakov y Vasina, 1978). Este método da mayor libertad para realizar un diseño optimizado. Al diseño optimizado de engranes no estándares de perfil de dientes involuta también fueron dedicados los trabajos de Roth y Pabst (1987) y de Podzharov (2005).

El problema de diseño de engranes con dientes de perfil involuta existe en caso de molinos con relativamente pequeños diámetros de masas (20 pulgadas) y el cambio de distancia entre ejes cerca de 2 pulgadas. Un análisis geométrico de engranes para estos molinos hecho por Urzúa Cevallos (2007) demostró que el mínimo número de dientes de engranes para obtener la relación de contacto mínima permisible de 1.1, debe ser de 15 dientes mínimo, y el ángulo de presión con la distancia nominal entre ejes debe ser de 10° como máximo para que el diente no sea agudo. En este caso no se cumple por mucho la no interferencia de dientes porque la circunferencia de paso casi coincide con la circunferencia de base de engranes. Este problema no existe en los molinos de agave de 30 pulgadas de diámetro de masas y para molinos de caña que tienen diámetros de masas suficientemente más grandes.

El problema de la interferencia de dientes no existe en los engranes cicloidales, Litvin, Fuentes (2004). Por esta razón los engranes cicloidales son utilizados actualmente en relojes mecánicos, Tishenko (1963), donde los piñones tienen pequeño número de dientes y con esto se estipula su uso, así como en el motor de Wankel, bombas y compresores, según Litvin y Pin-Hao (1996). Sin embargo en los últimos años se despertó el interés hacia los engranes cicloidales que tienen algunas ventajas en comparación con los engranes de perfil involuta como: a) alta eficiencia que resulta del relativamente pequeño deslizamiento durante el ciclo de embone, b) capacidad de lograr alta relación de engranaje sin interferencia, c) factores de deslizamiento del engranaje cicloidal menores que los del engranaje involuta, d) embone de una superficie convexa, formada por epicicloide, con una superficie cóncava, formada por hipocicloide, tiene menores esfuerzos de contacto que embone de dos involutas convexas, y mayor resistencia. La desventaja de engranes cicloidales en la fabricación de dientes prácticamente se elimina gracias a las

máquinas herramientas modernas con control numérico que permiten perfilar sin dificultad cualquier perfil de dientes con alta precisión.

Hay relativamente poca bibliografía sobre engranes cicloidales. La descripción de engranes cicloidales se puede encontrar en Litvin, Fuentes (2004) y el diseño en aplicación a lóbulos de compresores en Litvin y Pin-Hao (1996). Josifovic y Ivanovic (1996) hacen análisis de velocidades del punto de contacto y la relación de contacto en engranes cicloidales. El trabajo de Terauchi (1995) está dedicado al estudio de engranes mixtos evolventes-cicloidales. Solo hay una publicación de Negrín y Franco (2007) sobre engranes cicloidales con distancia entre ejes variable en que se hace análisis de utilización de involutas y epicicloides alargadas para perfiles de engranes con distancia entre ejes variable. Pero no se realiza la evaluación del error cinemático en función de la variación de la distancia entre ejes.

El presente estudio es dedicado al diseño de engranes cicloidales para engranajes con distancia entre ejes variable. Para evaluar el error cinemático se hizo un análisis cinemático del embone de engranes cicloidales cuando la distancia entre ejes aumenta hasta 10 por ciento y el embone de dientes se efectúa por las partes de dientes que se describen por epicicloides. Para realizar este análisis el mecanismo de engranaje cicloidal fue sustituido por un mecanismo de seis barras y dos correderas utilizando el principio de sustitución de pares cinemáticos superiores por pares cinemáticos inferiores.

## Diseño de engranes cicloidales

El perfil de un engrane cicloidal está compuesto en general de una epicicloide, que forma la cabeza del diente (Fig. 1), y de una hipocicloide que forma el pie del diente (Fig. 2). Una epicicloide es trazada por un punto C de un círculo (círculo generador) cuando éste rueda sin resbalar exteriormente por otro círculo (círculo de paso), como se muestra en la Fig.1. Si la circunferencia gira en el interior del círculo de paso, el punto C describe una hipocicloide (Fig. 2). La epicicloide e hipocicloide se unen en un punto en la circunferencia de paso. En general los círculos generadores de la epicicloide y de la hipocicloide tienen diferentes radios. Para que los perfiles de dientes de dos engranes sean conjugados, el círculo generador de epicicloide de un engrane debe ser igual al círculo generador de hipocicloide del engrane conjugado.

Es más cómodo describir las curvas epicicloide e hipocicloide en coordenadas polares  $R$  y  $\theta$ , Litvin, Fuentes (2004). En la Fig. 1 se puede ver que la longitud del radio vector del punto C en la epicicloide se determina por el teorema de cosenos

$$R_e = \sqrt{(r_p + r_{ge})^2 + r_{ge}^2 - 2(r_p + r_{ge})r_{ge} \cos \beta_e} \quad (1)$$

dónde

$$\beta_e = (r_p / r_{ge}) \alpha_e \quad (2)$$

El ángulo  $\theta_e$  se encuentra como

$$\theta_e = \alpha_e - \gamma_e \tag{3}$$

$$\gamma_e = \arcsin(r_{ge} \sin \beta_e / R_e) \tag{4}$$

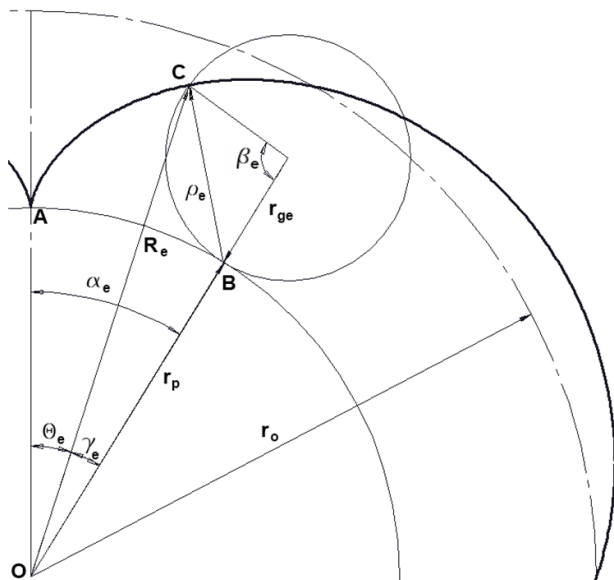


Fig. 1 Esquema de trazado de una epicicloide

Ecuaciones similares se puede recibir para la descripción de una curva hipocicloidal (Fig. 2):

$$R_h = \sqrt{(r_p - r_{gh})^2 + r_{gh}^2 - 2(r_p - r_{gh})r_{gh} \cos \beta_h} \tag{5}$$

$$\beta_h = (r_p / r_{gh})\alpha_h \tag{6}$$

$$\theta_h = \alpha_h - \gamma_h \tag{7}$$

$$\gamma_h = \arcsin(r_{gh} \sin \beta_h / R_h) \tag{8}$$

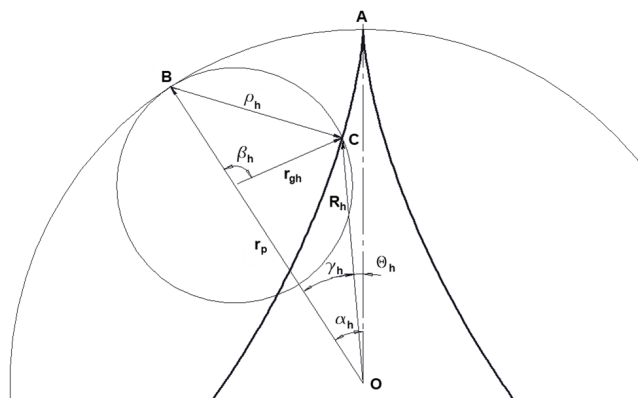


Fig. 2 Esquema de trazado de una hipocicloide

En el proceso de diseño las variables son el número de dientes  $N$ , el radio exterior de engranes  $r_o$ , adendo  $a$  y dedendo  $b$  de dientes, el radio del círculo generador  $r_g$ . Estos parámetros deben ser escogidos de tal manera que la relación

de contacto  $m_c$  durante la separación máxima de los ejes sea igual o mayor que 1.1 para asegurar que por lo menos un par de dientes siempre este en contacto. El radio del círculo generador se escoge el menor posible, pero que no haya recorte de dientes en el adendo. El aumento de  $r_g$  lleva a la disminución del espesor del diente en el pie, y la disminución de  $r_g$  al diente agudo y disminución de la relación de contacto del engranaje.

En la Fig. 3 se muestran los engranes cicloidales que fueron diseñados para molinos de agave, con masas de 20 pulgadas de diámetro y la distancia entre los ejes variable de 18.90 a 21.00 pulgada, Urzúa Cevallos (2007). El número de dientes de coronas que se utilizan en la industria es de 15. El intento de diseñar coronas con dientes de perfil involuta no tuvo éxito, los engranes tenían interferencia en el pie del diente. La simulación de estos engranajes mediante el simulador de movimiento SolidMotion del programa CAD SolidWorks, demostró que los engranes se atoraban a cualquier distancia entre ejes. La simulación de engranes cicloidales en SolidWorks demostró que estos engranes giraban suavemente, Urzúa Cevallos (2007).

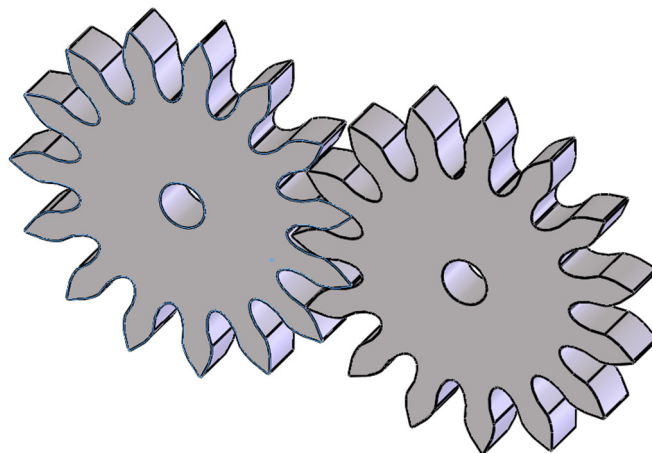


Fig. 3 Engranaje cicloidal

### Análisis de errores cinemáticos de engranes cicloidales

Aunque los engranes de molinos giran con pequeña velocidad 5-7 r.p.m., un gran error cinemático durante un ciclo de embone y una rotación no uniforme, sería perjudicial para la máquina y el proceso tecnológico. Por eso es necesario evaluar el error cinemático de engranes cicloidales en función del cambio de la distancia entre ejes.

El análisis preliminar demostró que en caso de los engranes cicloidales diseñados en el presente estudio, el embone se realiza entre epicicloide e hipocicloide y entre dos epicicloides, cuando la distancia entre ejes es mayor que nominal. El mayor error cinemático ocurre cuando el contacto es entre dos epicicloides. Para la determinación y análisis de este error se consideró conveniente utilizar el método grafo-analítico, Tishenko (1963). En este método los pares cinemáticos superiores de engranajes se sustituyen por pares cinemáticos inferiores. Tishenko (1963) usó el mecanismo de

cuatro barras para el análisis cinemático de engranajes de relojes con perfiles de dientes cicloidales simplificados. En el presente trabajo para la simulación de engranes cicloidales se propuso un mecanismo de seis barras y dos correderas.

El diagrama del mecanismo sustituto se muestra en la Fig. 4 para el caso de contacto de dos epicicloides. El mecanismo de sustitución está construido con la suposición de que los perfiles de dientes en el punto de contacto  $K$  tienen los radios de curvatura  $AK$  y  $BK$  que son colineales. El punto de contacto de perfiles  $K$  debe pertenecer a ambos círculos generadores simultáneamente. Los círculos generadores ruedan sobre los respectivos círculos de paso. Los puntos  $A$  y  $B$  son los puntos donde los círculos generadores con centros en  $C_1$  y  $C_2$  son tangentes a los círculos de paso con los centros en  $O_1$  y  $O_2$ . Si el punto  $B$  es un pivote de la barra  $AB$ , en los puntos  $A$  y  $K$  tendremos correderas.

Utilizando la ecuación vectorial de cierre del circuito  $O_1C_1KC_2O_2O_1$  y la condición de que las líneas  $BK$  y  $KA$  son colineales se puede componer las siguientes tres ecuaciones escalares que describen la posición del mecanismo en la Fig. 4 en función de coordenadas generalizadas  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ :

$$\begin{aligned} (r_{p1} + r_{g1}) \cos \theta_1 + (r_{p2} + r_{g2}) \cos \theta_4 + r_{g1} \cos \theta_2 + r_{g2} \cos \theta_3 &= 0 \\ (r_{p1} + r_{g1}) \sin \theta_1 + (r_{p2} + r_{g2}) \sin \theta_4 + r_{g1} \sin \theta_2 + r_{g2} \sin \theta_3 - C &= 0 \\ \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

El ángulo  $\theta_5$  no es una coordenada generalizada porque se define en función de otros ángulos

$$\theta_5 = 0.5(\theta_1 + \theta_2) = 0.5(\theta_3 + \theta_4) \tag{10}$$

Las ecuaciones (9) fueron resueltas mediante el método numérico Newton-Raphson. Como resultado se obtuvieron valores de  $\theta_2, \theta_3$  y  $\theta_4$  en función del ángulo  $\theta_1$ .

El error cinemático puede ser evaluado por el cambio de la relación de velocidades  $r_v = \omega_1 / \omega_2$ . De acuerdo con la ley fundamental del engranaje, la normal a los perfiles de dientes  $AB$  (Fig. 4) divide la distancia entre los ejes  $O_1O_2$  en la relación inversamente proporcional a la relación de velocidades:

$$r_v = \omega_1 / \omega_2 = O_2P / O_1P = C / O_1P - 1 \tag{11}$$

donde:

$$O_1P = r_p \cos(\beta_1 / 2) / \cos(\alpha_1 + \beta_1 / 2) \tag{12}$$

$$\alpha_1 = 90^\circ + \theta_1, \beta_1 = 180^\circ + \theta_1 - \theta_2 \tag{13}$$

Es conveniente expresar los resultados del cálculo de  $r_v$  para engranajes cicloidales con la distancia entre ejes de 18.9 a 21 pulgada como función del ángulo  $\alpha_1$ . Los cálculos se presentan en la Fig. 5. Como los engranes de un molino tie-

nen en el mismo número de dientes, la relación de velocidades nominal es igual a 1.0. De la Fig. 5 se ve que la variación de la relación de velocidades no excede el 20% del valor nominal, igual a 1.0, cuando la separación máxima de los ejes de engranes es igual a 10% de la distancia entre ejes.

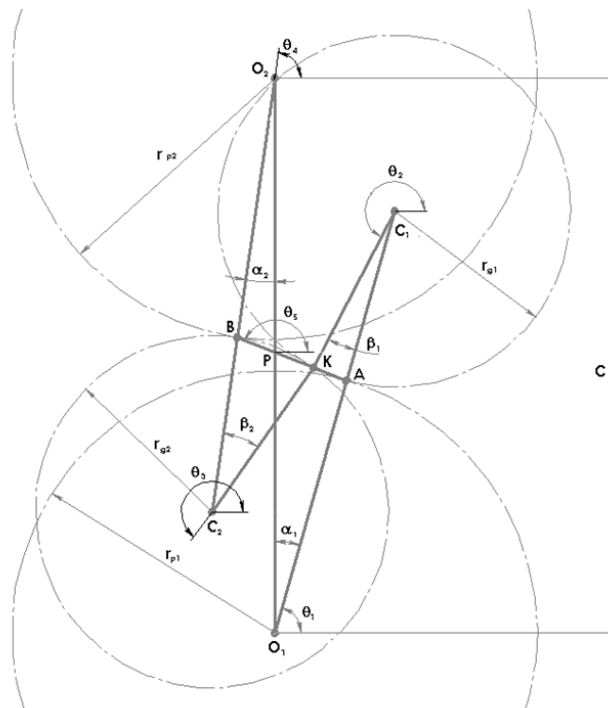


Fig. 4 Diagrama del mecanismo de sustitución

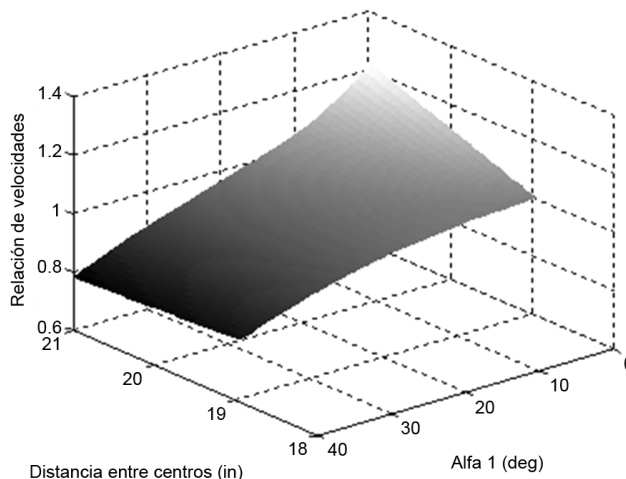


Fig. 5 Gráfica de la relación de velocidades

Un análisis dinámico muestra que la influencia del error cinemático es insignificante en la dinámica del mecanismo porque la frecuencia del cambio del error cinemático es muy baja.

**Conclusiones**

El intento de diseño de engranes con dientes de perfil involuta para molinos de agave con la distancia entre ejes de 20 pulgadas no tuvo éxito. Los dientes tenían un rebaje grande en el pie.

La simulación de estos engranajes mediante el simulador de movimiento SolidMotion del programa CAD SolidWorks, demostró que los engranes con perfil cicloidal de dientes, giraban suavemente mientras que los engranes de perfil involuta se atoraban a causa de la interferencia de dientes.

Para el análisis cinemático de engranes cicloidales con distancia entre ejes variable se propuso un mecanismo de sustitución de engranes de perfil cicloidal utilizando el principio del engranaje y el cambio de pares cinemáticos superiores por pares cinemáticos inferiores.

La solución numérica de las ecuaciones de cierre de circuito, que describen este mecanismo, da como resultado que la variación de la relación de velocidades no excede 20% del valor nominal, cuando la distancia entre ejes aumenta 10%.

Los engranes con dientes de perfil cicloidal pueden ser utilizados como coronas de molinos de agave y de caña.

### Referencias

- Josifovic D., Ivanovic L. *Analysis and Synthesis of External Cycloidal Spur Gearing*, Proceedings of the Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Politécnico di Milano, Vol.1, Milano, Italy, 1995, pp. 415-418.
- Litvin F.L., Fuentes A. *Gear Geometry and Applied Theory*. Cambridge University Press, UK, 2004, 790 p.
- Litvin F. L., Pin-Hao Feng. "Computerized Design and Generation of Cycloidal Gearing." *Mechanism and Machine Theory*. Elsevier Science Ltd., v.31, n.7, 1996, pp. 891-911.
- Molgora Castañeda R. *Instalación de un molino de caña para incrementar la capacidad de producción de azúcar en el ingenio Independencia*, S.A. en Martínez de la Torre. Universidad de Guanajuato, 1976, 105 p.
- Negrín Hernández, Franco Rodríguez R. "Estudio de las curvas epicicloide y evolvente para formar el perfil de los engranajes que operan con distancia entre centros variable." *Ingeniería Mecánica*, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, v. 3, n. 4, 2007, pp. 71-75.
- Podzharov E. *Selection of Geometric Parameters of Gear and Grinding Wheel to Ensure Maximum Gear Tooth Profile Accuracy*. *Journal of Machining Science and Technology*. 2005, 9 (3), pp. 369-381.
- Terauchi Y. Nagamura K. *On Design and Performance of Involute-Cycloid Composite Tooth Profile Gear*. Proceedings of Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. Politécnico di Milano, Milano, Italy, 1995, pp. 490-494.
- Tishenko O. F. *Engranajes de mecanismos de relojes*. Moscú, MASHGIZ, 1963, 212 p. (en ruso).
- Roth K., Pabst L. *Rechneruntersützte Auslegung nicht bezugsprofil-gebundener Evolventen-Stirnrad-Paarungen höchster Tragfähigkeit*. *Konstruktion*, 1987, Vol. 39, N. 9, pp. 359-364.
- Urzúa Cevallos, I. S. Tesis de Maestría en Ciencias: *Diseño de engranes para mecanismos con ejes móviles*, Universidad de Guadalajara, México, Julio de 2007, 124 p.
- Vulgakov E.B., Vasina L.M. *Engranajes involuta en parámetros generalizados: Manual para cálculo geométrico*. Moscú, Mashinostroenie, 1978, 174 p. (en ruso).