

## Determinación del error funcional de un prototipo digitalizador 3D utilizando patrones de calibración

### Determination of the measurement error of a 3D digitizer prototype using metrological calibration features

Fco. Eugenio López G.\*, Juan Diego Rivas Salinas, Francisco Ramírez Cruz

Departamento de Mecatrónica, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León.

Av. Universidad S/N, CP 66451, San Nicolás de los Garza, N.L., México.

Teléfono: (0052-81) 8329-4020, Fax: (0052-81) 8332-0904

\* Prof.Dr.Elopez@gmail.com

#### Resumen

En el presente trabajo se describe una estrategia empleada para calcular el error de ajuste en curvas y superficies seleccionadas del estándar ISO 10360-6 para máquinas de medición y digitalizadores 3D, empleando el criterio de mínimos cuadrados. Se detallan los pasos algebraicos para la determinación de las ecuaciones y algoritmos de cálculo para el caso de una línea recta y un plano, así como también el caso de un círculo y una esfera. Las entidades plano y esfera son utilizadas como objetos patrón para la determinación del error de un prototipo digitalizador desarrollado por los autores. Los resultados encontrados arrojaron un grado de certidumbre aceptable en el digitalizador para algunas aplicaciones.

#### Abstract

This paper describes a strategy used to calculate the estimation error in curves and surfaces fitting from the ISO 10360-6 standard for measuring machines and 3D digitizers, using the least squares criterion. The algebraic steps for the determination of the equations and calculation algorithms for the line case and a plane are detailed, as well as the case of a circle and a sphere. The plane and sphere entities are used as standard objects for the error estimation of a digitizer prototype developed by the authors. The results found yielded an acceptable degree of certainty in the digitizer for some applications.

#### Palabras clave:

Palabras Clave: Digitalizador 3D, Ajuste a curvas y superficies, Máquinas de medición, ISO 10360-6, objeto de calibración, Estimación de error.

#### Keywords:

3D Scanner, Curve and surface fitting, Measurement machines, ISO 10360-6, calibration object, Error estimation

#### Introducción

La digitalización de geometrías tridimensionales se ha convertido en un proceso crítico que apoya fuertemente la manufactura. Hoy en día existe suficiente oferta de digitalizadores 3D en el mercado, y al mismo tiempo, nuevas tecnologías emergen implementando mejores dispositivos, abaratando componentes y optimizando cálculos. Las limitaciones de algunos sistemas han sido objeto de investigaciones como las de [2-4]. Aunque la implementación de la digitalización 3D ha llegado completamente a los trenes productivos [5-7] a partir de máquinas de coordenadas, en el caso de México no han penetrado significativamente su mercado. Ver la Prospectiva Tecnológica Industrial de México 2002-2012 en el Sector 8 Diseño y Automatización, área 8.1 Diseño.

El proceso de producción para objetos con superficies complejas [8,9] permite {1} la digitalización de objetos con facilidades que implican usuarios con el mínimo de requerimientos cognitivos; ello abarata el proceso y permite una mejora de las características estéticas y funcionales del producto (optimización del proceso de diseño con la introducción de métodos de ingeniería inversa). {2} nuevas funciones para el diseño estilístico, para permitir mejores resultados: mejor

calidad y menor tiempo invertido en el diseño y {3} una arquitectura nueva de sistema tipo modular, que permitirá a las pequeñas y medianas empresas acceder a los sistemas de diseño alternativo, hasta ahora fundamentalmente usados por las grandes empresas (fig. 1).

En cada aparato digitalizador existen de manera imbuida los algoritmos de ajuste propios para la calibración utilizando cálculos internos basados en geometrías de referencia. Estos procedimientos son opacos para el usuario y no permiten evaluar la eficiencia del cálculo interno del digitalizador.

Los algoritmos de las máquinas de medición son mantenidos en confidencialidad por los fabricantes, por lo que es difícil comparar, evaluar y eliminar las inconsistencias de software o elegir el método mejor. Consecuentemente, en los últimos años se han desarrollado proyectos de investigación internacionales para establecer un método para probar las herramientas de software sin que los fabricantes de máquinas de medición tengan que develar sus técnicas de construcción. Los resultados de estos estudios han cristalizado en la norma ISO 10360-6, que define:

**Métodos de prueba:** Evaluación de la estimación del software comparando los parámetros del modelo de prueba contra sus valores referenciados.

**Parámetros de prueba:** Definición de los parámetros del modelo de prueba.

**Criterios de estimación de parámetros:** Minimización de los errores medidos.

**Error de medición:** La distancia geométrica entre el modelo de prueba y un punto medido.

**Conjunto de puntos:** Valores coordenados de un conjunto de puntos arbitrariamente localizados en el volumen del modelo de prueba.



Figura 1.- Procesos involucrados en la digitalización de geometrías.

Hay también una serie de problemas relacionados con la temperatura y la repetibilidad de la máquina que normalmente se considerarían en un análisis de incertidumbre de calibración. Además, existe cierta preocupación sobre lo que significa ISO 10360-2 con la frase "incertidumbre de calibración". Algunos expertos dicen que esto también incluye la incertidumbre que surge cuando el instrumento se utiliza a una temperatura diferente a los 20° C estándar. Dado que un estándar de material generalmente se calibra a 20° C, si se usa a otras temperaturas, entonces la calibración no es necesariamente válida y existe incertidumbre adicional debido a la incertidumbre del coeficiente de expansión térmica.

En la Tabla I se resumen las entidades y los parámetros que el estándar ISO 10360-6 define para los modelos de prueba:

Tabla I.- Entidades patrón para modelos de prueba ISO 10360.

Entidad	Dimensión	Posición	Orientación
Línea	2D / 3D	XY / XYZ	ab / abc
Plano	3D	XYZ	abc
Círculo	2D / 3D	XYZ	ab / abc
Esfera	3D	XYZ	abc
Cilindro	3D	XYZ	abc
Cono	3D	XYZ	abc
Toro	3D	XYZ	abc

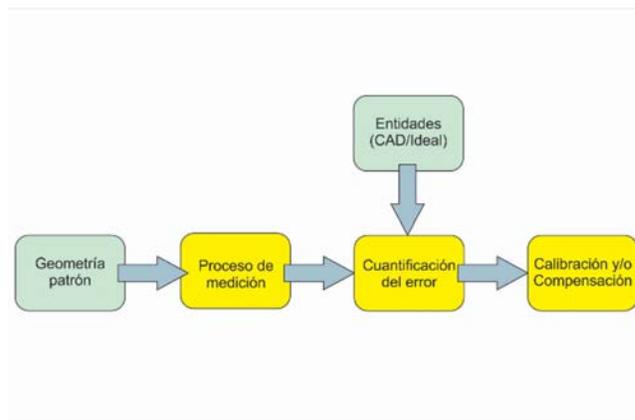


Figura 2.- Método para la cuantificación del error del proceso de digitalización.

El objetivo principal del presente trabajo consiste en *cuantificar el error del proceso de digitalización*, sin considerar la estimación de parámetros, supeditándose especialmente al caso del cálculo estimado con base en geometrías patrón (ver figura 2). Para lograrlo es necesario alcanzar las siguientes metas:

- Diseñar y construir un sistema propio para la captura de coordenadas espaciales.
- Elaborar algoritmos de cálculo.
- Cuantificar los resultados con una interfaz flexible dentro de un programa de CAD comercial.

A pesar de que el ajuste lineal (e inclusive el ajuste a un plano) son conocidos suficientemente, en este trabajo se ha privilegiado detallar consistentemente las entidades básicas de que consta el estándar ISO 10360-6, y por lo tanto se ha incluido el desglose de ecuaciones; para el modelo experimental se presentan los casos de las entidades patrón *Plano* y *Esfera*. El cálculo de las entidades *Línea* y *Círculo* se presentan como fundamento necesario para las entidades *Plano* y *Esfera* respectivamente.

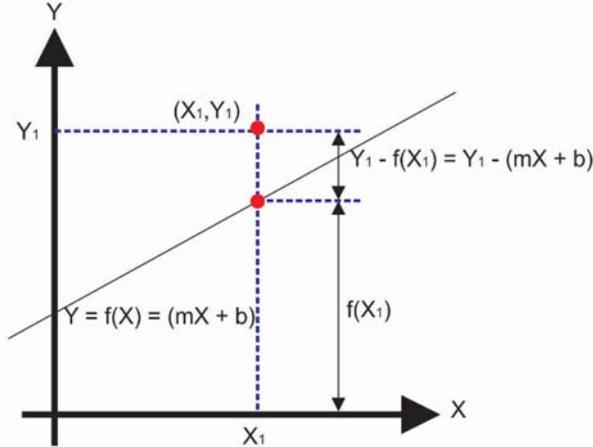
Este trabajo no presenta ni mejoras o variantes a los algoritmos de ajuste, sino más bien la problemática del proceso de digitalización y la cuantificación del error basado en a) algoritmos conocidos que aquí se presentan y b) patrones de calibración estandarizados con características de calidad y desviaciones geométricas más precisas que las del prototipo de digitalizador a evaluar. No se presentan los ajustes clásicos de evaluación de modelos teóricos, sino más bien el procedimiento referido al estándar ISO, en donde el valor del error calculado proporciona una estimación aceptable y es el común denominador para todas las geometrías de prueba.

El presente trabajo apoya los trabajos desarrollados por los autores sobre optimización geométrica usando algoritmos de crecimiento biológico [10-14], y en el desarrollo de un sistema que para la digitalización de objetos de geometría compleja [15-18].

**Método de los mínimos cuadrados**

El método de mínimos cuadrados fue desarrollado por Gauss en 1809 [1], y permite encontrar la función continua (una recta para el caso de la figura 3) que mejor se aproxime a un conjunto de mediciones. El ajuste a una recta (y a un plano) es conocido como regresión lineal en estadística.

*Ajuste a una línea recta*



**Figura 3.-** Criterio para el ajuste lineal / plano.

En donde el error es la suma de cuadrados de las diferencias:

$$f1 = r_1 - r \quad f2 = r_1^2 - r^2 \tag{1}$$

Y las condiciones para la minimización del error son:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial b} = 0 \tag{2}$$

Esto es,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial m} = m \sum_{i=0}^n x_i^2 + b \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n x_i y_i \tag{3a}$$

y

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial b} = m \sum_{i=0}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=0}^n y_i \tag{3b}$$

Sustituyendo y agrupando se tiene:

$$Mt = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{pmatrix} \tag{4}$$

Resolviendo  $R = Mt^{-1}v$  se obtienen los valores de la pendiente  $m$  y la intersección  $b$  buscados.

**Programa de computadora**

Se elaboró un programa de computadora con las ecuaciones para el ajuste de la recta. Para evitar introducir cambios en los valores debido a propiedades del proceso de digitalizador, se simularon datos de medición a partir de la ecuación

de la recta añadiendo un valor de error como se muestra en la Tabla II.

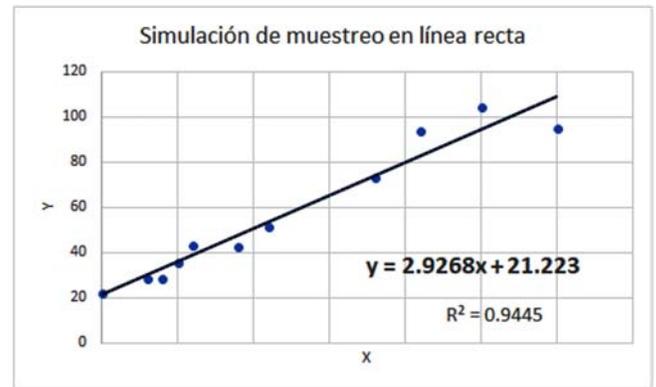
$$x_i = \text{round}(\text{rnd}(\text{Max}))$$

$$y_i = (3x + 20) \cdot \delta(0.3) \tag{5}$$

$$\delta(t) = 1 - \text{rnd}(t) + \frac{t}{2}$$

**Tabla II.-** Valores.

X	Y	X	Y
0	22.286	21	94.029
6	43.598	9	43.005
18	73.297	3	28.827
11	51.382	4	28.391
25	104.512	30	94.955
5	35.517		



**Figura 4.-** Ajuste de la ecuación X utilizando Microsoft Excel.

Los valores de ajuste de la ecuación X utilizando el algoritmo propio fueron:

$$R = \begin{pmatrix} 2.927 \\ 21.223 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Con un coeficiente de correlación de 0.944

**Ajuste a un plano**

Análogamente al ajuste a una línea, el problema para un plano puede resolverse de la misma manera.

$$\epsilon^2 = \sum_{i=0}^n (ax_i + by_i + c - z_i)^2 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial c} = 0 \tag{8}$$

Esto es,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a} = \sum_{i=0}^n 2(ax_i + by_i + c - z_i)x_i = 0 \tag{9a}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = \sum_{i=0}^n 2(ax_i + by_i + c - z_i)y_i = 0 \quad (9b)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c} = \sum_{i=0}^n 2(ax_i + by_i + c - z_i) = 0 \quad (9c)$$

O sea,

$$\sum_{i=0}^n ax_i^2 + \sum_{i=0}^n bx_i y_i + \sum_{i=0}^n cx_i = \sum_{i=0}^n x_i z_i \quad (10a)$$

$$\sum_{i=0}^n ax_i y_i + \sum_{i=0}^n by_i^2 + \sum_{i=0}^n cy_i = \sum_{i=0}^n y_i z_i \quad (10b)$$

$$\sum_{i=0}^n ax_i + \sum_{i=0}^n by_i + cn = \sum_{i=0}^n z_i \quad (10c)$$

Finalmente,

$$MA = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n y_i^2 & \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n y_i & n \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$MB^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i z_i & \sum_{i=0}^n y_i z_i & \sum_{i=0}^n z_i \end{pmatrix} \quad (12)$$

Haciendo ajustes de mínimos cuadrados para el plano y resolviendo  $R = MA^{-1} * MB$  se encuentran los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  buscados.

**Programa de computadora**

Se elaboró un programa de computadora con las ecuaciones para el ajuste al plano. Para evitar introducir cambios en los valores debido a propiedades del proceso de digitalizador, se simularon datos de medición a partir de la ecuación del plano añadiendo un valor de error. La matriz de valores de coordenadas no se muestra por razones de espacio.

$$\begin{aligned} i &= 0..MaxFil \\ j &= 0..MaxCol \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} k &= 0..N - 1 \\ x_k &= \text{mod}(k, MaxFil) \end{aligned} \quad (14)$$

$$y_k = \text{trunc}\left(\frac{k}{MaxCol}\right) \quad (15)$$

$$z_k = -\frac{3x + 5y + 6}{7} + \text{rnd}(1) \quad (16)$$

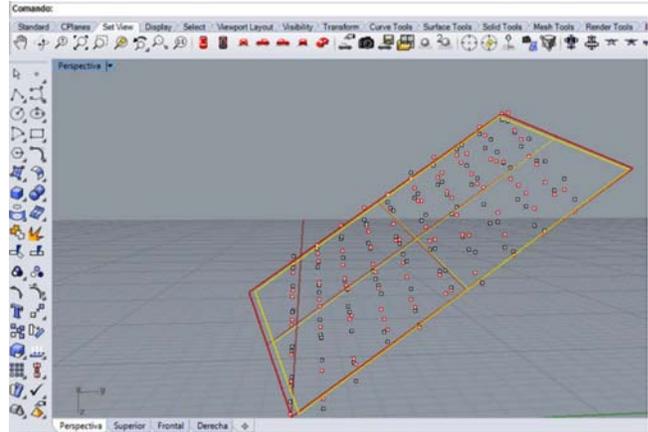


Figura 5.- Comparación entre el plano de ajuste (ecuación 12 en rojo) vs CAD (ajuste con software comercial en amarillo).

**Ajuste a un círculo**

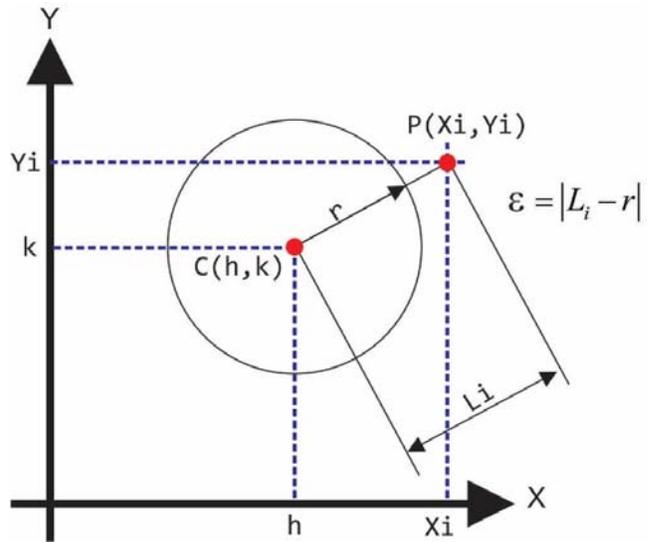


Figura 6.- Criterio el ajuste a círculo / esfera.

$$\varepsilon(h, k, \alpha) = \sum_{i=0}^n (L_i - \alpha)^2 \quad (17)$$

$$L_i = \sqrt{(x_i - h)^2 + (y_i - k)^2} \quad (18)$$

En donde  $\alpha = r^2$ , y una vez más, el criterio de minimización es:

$$\frac{\partial \varepsilon(h, k, \alpha)}{\partial h} = 0, \frac{\partial \varepsilon(h, k, \alpha)}{\partial k} = 0, \frac{\partial \varepsilon(h, k, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (19)$$

Desarrollando y agrupando, las matrices de coeficientes son:

$$Mt = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n y_i^2 & \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n y_i & n \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$v = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i (x_i^2 + y_i^2) \\ \sum_{i=0}^n y_i (x_i^2 + y_i^2) \\ \sum_{i=0}^n (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Con el método de coeficientes indeterminados obtenemos linealizada la ecuación general del círculo:

$$x^2 + y^2 = Ax + By + C \quad (22)$$

En donde la forma matricial es

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = Mt^{-1} \cdot v \quad (23)$$

Y los parámetros buscados son:

$$h = \frac{A}{2}, k = -\frac{B}{2}, r = \frac{\sqrt{4C + A^2 + B^2}}{2} \quad (24)$$

**Programa de computadora**

Se elaboró un programa de computadora con las ecuaciones para el ajuste del círculo. Para evitar introducir cambios en los valores debido a propiedades del proceso de digitalizador, se simularon datos de medición a partir de la ecuación añadiendo un valor de error.

La ecuación paramétrica es:

$$\begin{aligned} X(t) &= r \cos(t), & Y(t) &= r \sin(t), \\ Z(t) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Los datos se generaron con el radio de 40.

$$x_i = X\left(\frac{i}{Max} 2\pi\right) + rnd\left(\frac{r}{10}\right) \quad (26)$$

$$y_i = Y\left(\frac{i}{Max} 2\pi\right) + rnd\left(\frac{r}{10}\right) \quad (27)$$

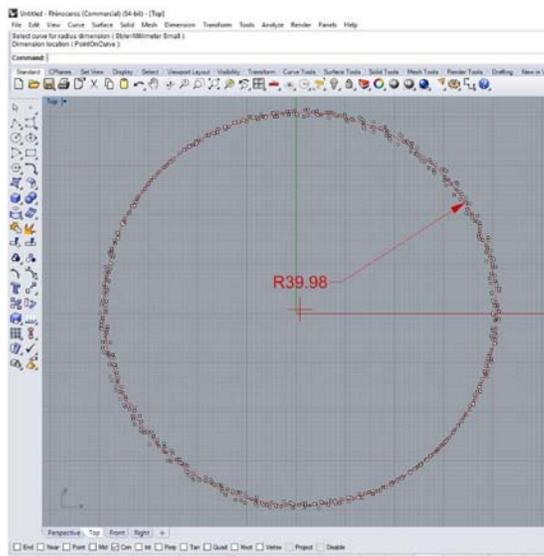


Figura 7.- Valor de ajuste del círculo (rojo) en CAD (Rhinoceros).

Los valores de la ecuación 23 resultado de la simulación fueron:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.863 \\ 3.984 \\ 1605.646 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} h &= \frac{-A}{2} = -1.931, & k &= \frac{-B}{2} = -1.992 \\ r &= \frac{\sqrt{4C + A^2 + B^2}}{2} = 40.166 \end{aligned} \quad (29)$$

El error de ajuste de la simulación fue de 0.167, mientras que el software de CAD fue de 0.02.

**Ajuste a una esfera**

Análogamente al ajuste a un círculo, el problema para una esfera puede resolverse de la misma manera. Ya que el problema de ajuste esférico no es lineal, diferentes algoritmos han sido propuestos para dicho ajuste. Ver [34-38]. El método a menudo utilizado es la minimización por medio del método Gauss Newton [39-41].

Sea

$$f1 = r_1 - r \quad f2 = r_1^2 - r^2 \quad (30)$$

donde

$$r_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \quad (31)$$

x, y, z El centro de la esfera

r El radio de la esfera

La ecuación de la distancia es

$$d_i = d(x_i) = d(x_i, x, r) = |x_i - x| - r \quad (32)$$

La ecuación de la distancia de un punto a la esfera es una función no lineal, por lo cual es necesario emplear algún algoritmo de minimización no lineal para la solución del problema de ajuste de puntos a la geometría, a menudo se usa el algoritmo de Gauss-Newton. Este algoritmo necesita una aproximación inicial a los parámetros reales que se encuentre cercana la verdadera solución. En donde se ajusta a mínimos cuadrados la ecuación lineal (ecuación 11) y se encuentran con ello los valores iniciales para el algoritmo de convergencia utilizando la función.

$$J P = -d \quad (33)$$

En la iteración del algoritmo de Gauss-Newton la matriz jacobiana y el vector de residuos se pueden expresar como:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{(x_1 - x_0)}{r_1} & -\frac{(y_1 - y_0)}{r_1} & -\frac{(z_1 - z_0)}{r_1} & -1 \\ -\frac{(x_2 - x_0)}{r_2} & -\frac{(y_2 - y_0)}{r_2} & -\frac{(z_2 - z_0)}{r_2} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{(x_n - x_0)}{r_n} & -\frac{(y_n - x_0)}{r_n} & -\frac{(z_n - z_0)}{r_n} & -1 \end{bmatrix} = -1 \quad (34)$$

Así como también

$$\frac{\partial}{\partial x} d_i = \frac{x_i - x}{r_i}, \quad \frac{\partial}{\partial y} d_i = \frac{y_i - y}{r_i} \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} d_i = \frac{z_i - z}{r_i}, \quad \frac{\partial}{\partial r} d_i = -1$$

Y se encuentran los valores de  $P=[P_x0, P_y0, P_z0, P_r]^T$ . El siguiente ciclo es recalcar con  $C += P$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 + P_x0 \\ y_0 &= y_0 + P_y0 \\ z_0 &= z_0 + P_z0 \\ r_0 &= r_0 + P_r \end{aligned} \quad (36)$$

La convergencia se encuentra cuando  $J^T d$  es mínimo. En la figura 8 se presenta el diagrama de flujo del algoritmo del programa de computadora implementado para el cálculo de los parámetros del ajuste a esfera.

El algoritmo de Gauss-Newton se basa en el algoritmo de Newton para la determinación de las raíces de una función, y presenta problemas de convergencia cuando la aproximación inicial no está en la vecindad de la real.

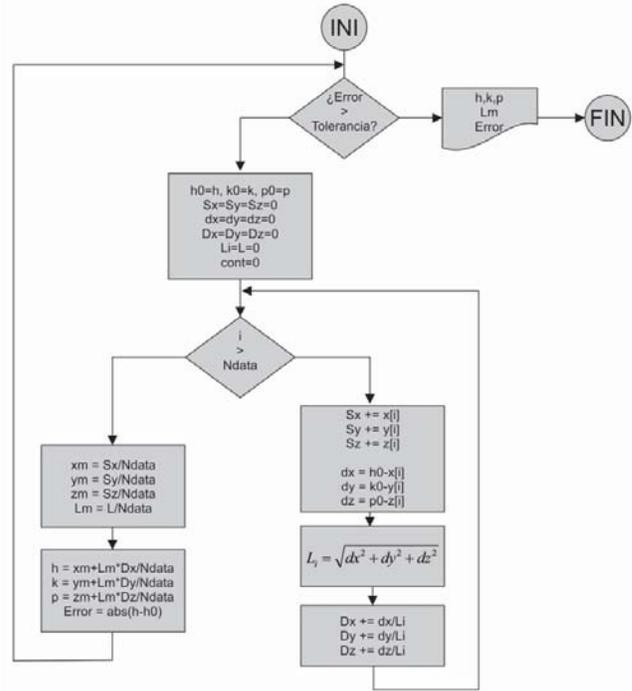


Figura 8.- Algoritmo Gauss-Newton para el cálculo de los parámetros de la esfera.

### Programa de computadora

Se elaboró un programa de computadora con las ecuaciones para el ajuste del círculo. Para evitar introducir cambios en los valores debido a propiedades del proceso de digitalizador, se simularon datos de medición a partir de puntos discretos de una esfera de CAD parcial.

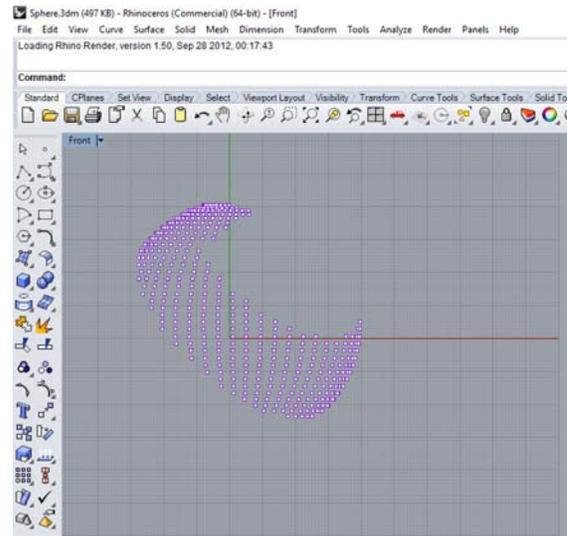


Figura 9.- Puntos discretizados de una entidad de esfera en CAD.

Dado que los puntos no están distribuidos a través de toda la superficie de la esfera, no es necesario añadir un error como en casos anteriores. El algoritmo debe arrojar una buena aproximación del radio con la muestra parcial de datos.

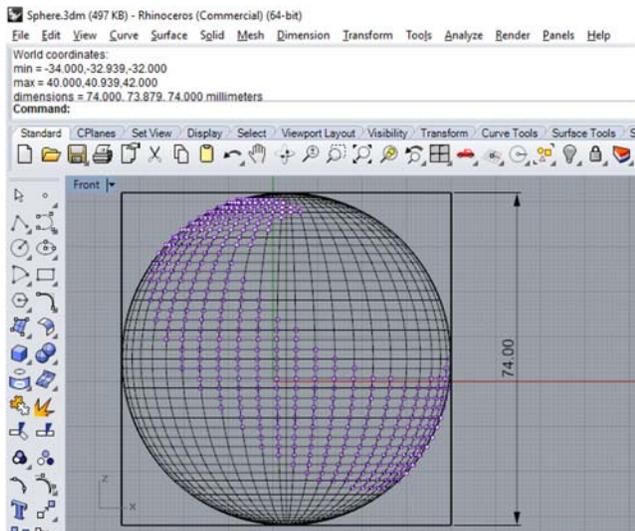


Figura 10.- Resultado del cálculo de simulación utilizando el algoritmo de ajuste.

Los valores encontrados por el algoritmo fueron:

$$h = 3.002, k = 4.001, p = 5.003, r = 36.999$$

que concuerdan con los valores de creación de la entidad CAD, origen de la muestra.

### Cuadro experimental

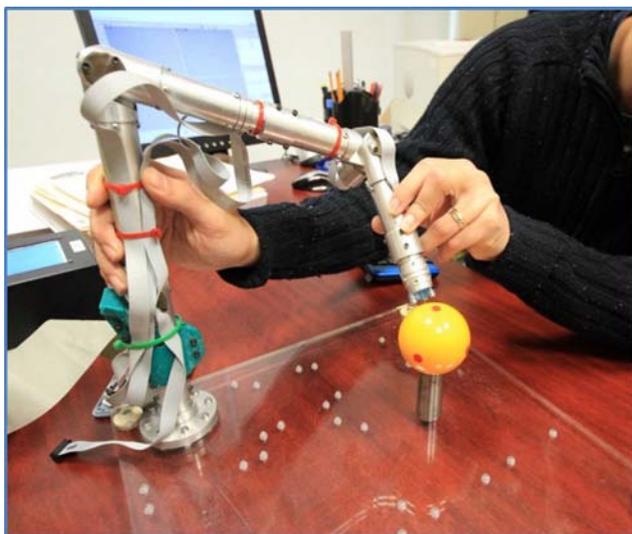


Figura 11.- Fotografía mostrando el uso del digitalizador para hacer una medición de la esfera de calibración.

La experimentación se hizo utilizando el desarrollo propio de brazo digitalizador presentado en [18]. Para el cálculo de error se utilizaron dos objetos como patrón de calibración (ver [25-28]): a) un bloque patrón certificado de mármol y b) una bola esférica. A falta de un objeto patrón esférico, el cálculo para la esfera se realizó utilizando una

bola comercial de billar como objeto de calibración, ya que los estándares de su producción son suficientemente rigurosos. Se muestrearon puntos a lo largo de la superficie de ambos cuerpos de calibración, se calcularon las dimensiones experimentales y se compararon con las medidas de la pieza patrón. El error de medición se evaluó comparando la nube de puntos arrojada por el digitalizador y las dimensiones ideales del cuerpo de calibración.

Bloque patrón:

- Marca Mitutoyo “Graplate”
- Precisión 0.0002 in
- Grado: B
- Tamaño 8x12 in
- Número de serie: 548-0
- Calibrado por: National Bureau of Standards

Patrón esférico:

- Bola de billar de tipo carambola.
- Grado A
- Diámetro: 61.5mm
- Peso: 210 gms
- Material: polímero plástico termoestable

Los algoritmos matemáticos se hicieron en Mathcad 14, versión 14.0.0.163 de Parametric Technology Corporation. Los programas para el cálculo fueron desarrollados utilizando el compilador Bloodshed Dev-C++, el cual es distribuido bajo la licencia pública GNU.

### *Cálculo del error para el plano y resultados*

Para la evaluación del bloque patrón las mediciones fueron ajustadas a un plano utilizando las ecuaciones 9 y 10. Ver [29-31]. A continuación, se presentan las mediciones experimentales y el ajuste realizado por computadora.

Se encuentra el plano de ajuste para la nube de puntos. Los valores de desviación de la nube de puntos con respecto a este plano se muestran en la Tabla III. Dichos valores son valores de error producto de la medición.

Tabla III.- Valores (mm) de desviación al plano de ajuste

Número de puntos	471
Distancia promedio	0.44196
Distancia mediana	0.40036
Desviación estándar	0.27343
Distancia de ajuste máx. admisible	1
Distancia de ajuste min. Admisible	0

En la figura 13a y 13b se muestran en amarillo los puntos medidos del experimento, en verde la interconexión de éstos como malla triangular, en azul el plano de ajuste resultado del ajuste a mínimos cuadrados y en rojo, escaladas visible, las desviaciones de cada punto a dicho plano.

Como dato complementario, se tomaron las medidas exteriores del bloque patrón: 205.38 x 300.14mm (8.085in x 11.827in). Lo cual arroja un el error de 1.07% y -1.53% respectivamente. Ver figura 14.



Figura 12.- Fotografía del bloque patrón.

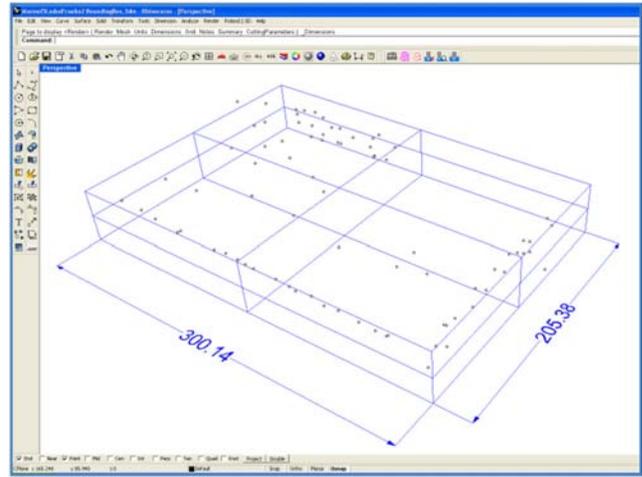


Figura 14.- Mediciones en CAD 3D Rhinoceros tomadas con el brazo digitalizador al bloque patrón de mármol. Las cotas muestran las dimensiones medidas.

**Cálculo del error para la esfera y resultados**

La siguiente fase de prueba se realizó escaneando la esfera. La importancia de esta fase fue un paso hacia una geometría más compleja, que es apropiada para una aplicación real de un escáner comercial. En segundo lugar, al escanear una esfera, los datos necesarios para la creación de la primitiva geométrica se pueden adquirir mediante un único escaneo, eliminando el error causado por el ensamblaje de subsiguientes escaneos.

Para la evaluación la esfera las mediciones fueron ajustadas a una esfera utilizando el algoritmo Gauss-Newton. Ver [32, 33]. A continuación, se presentan las mediciones experimentales y los resultados de ajuste realizado por computadora con el algoritmo presentado en la sección 2.4.1.

Tabla IV.- Experimentación para el ajuste a esfera

Experimento	Resultados estadísticos de error
E00	Tabla V y figura 15
E09	Tabla VI y figura 16
E10	Tabla VII y figura 17
E11	Tabla VIII y figura 18

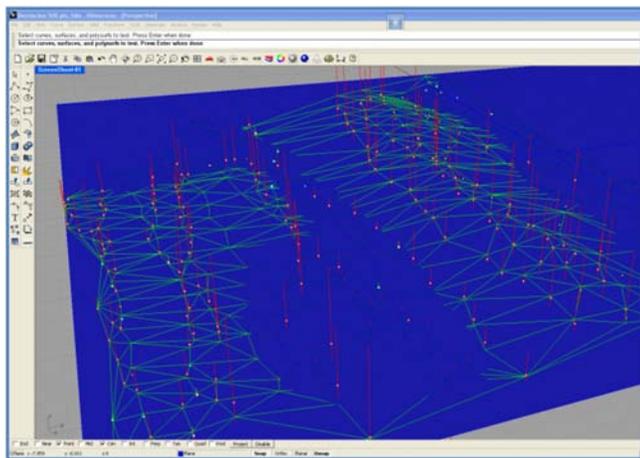
**Experimento E00**

A continuación se presentan los valores del experimento E00:

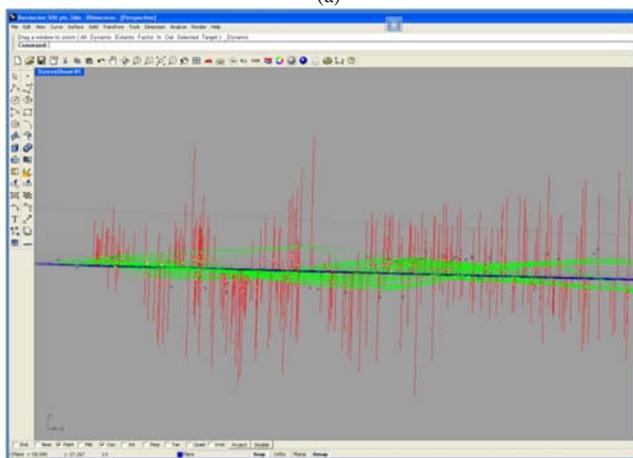
Tabla V.- Valores (mm) de desviación a la esfera E00

Número de puntos	757
Desviación estándar	1.15
Desviación promedio	0.930 /-0.772
Diámetro resultado del ajuste Gauss-Newton	64.429
Error calculado	2.929

EDICIÓN DIGITAL

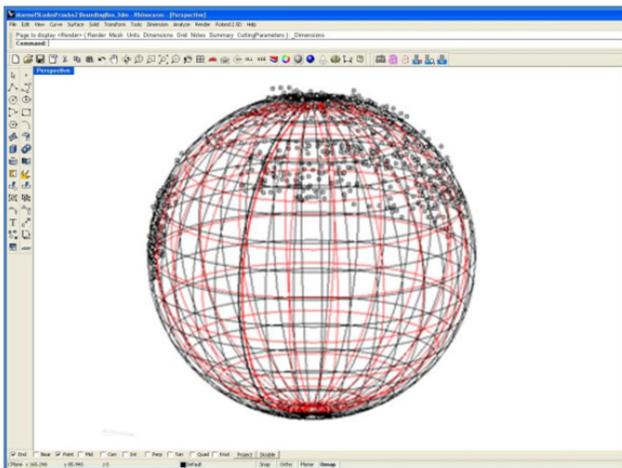


(a)

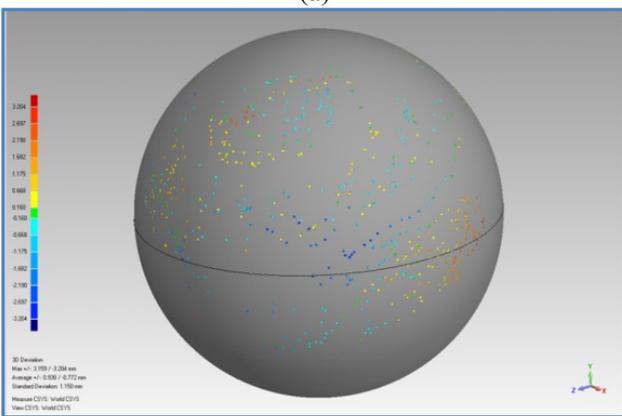


(b)

Figura 13.- Tanto en (a) como en (b) se muestran: puntos medidos, malla triangular, plano de ajuste y desviaciones al plano.



(a)



(b)

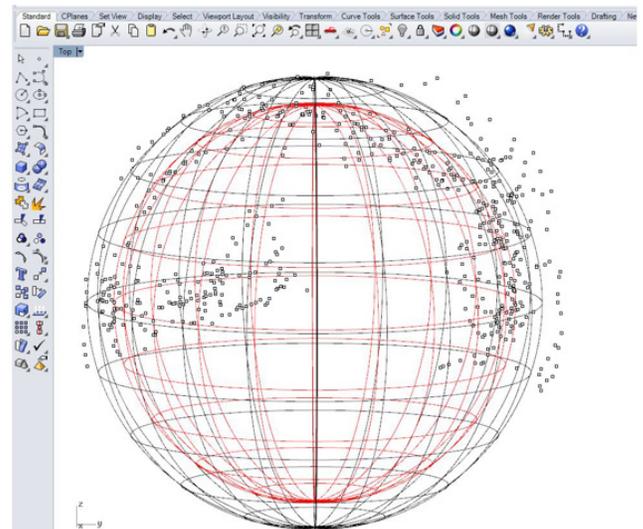
Figura 15.- Experimento E00: Mediciones en CAD 3D Rhinoceros tomadas con el digitalizador a la esfera patrón. En (a) se muestra la esfera roja producto del ajuste, mientras que en negro el valor ideal. En (b) se muestra el mapa de color de las desviaciones.

**Experimento E09**

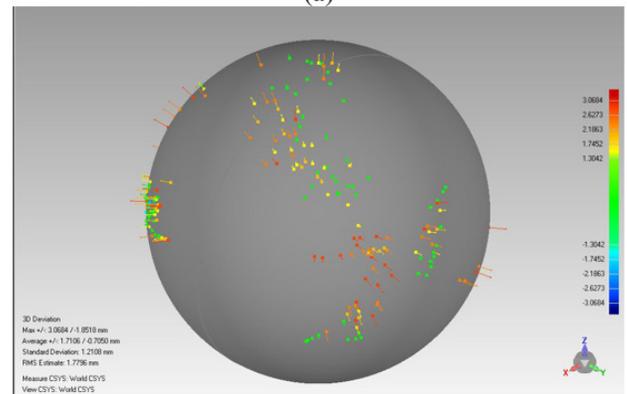
A continuación se presentan los valores del experimento E09:

**Tabla VI.-** Valores (mm) de desviación a la esfera E09

Número de puntos	208
Desviación estándar	1.2108
Desviación promedio	1.7106 / -0.7050
Diámetro resultado del ajuste Gauss-Newton	69.6814
Error calculado	8.1814



(a)



(b)

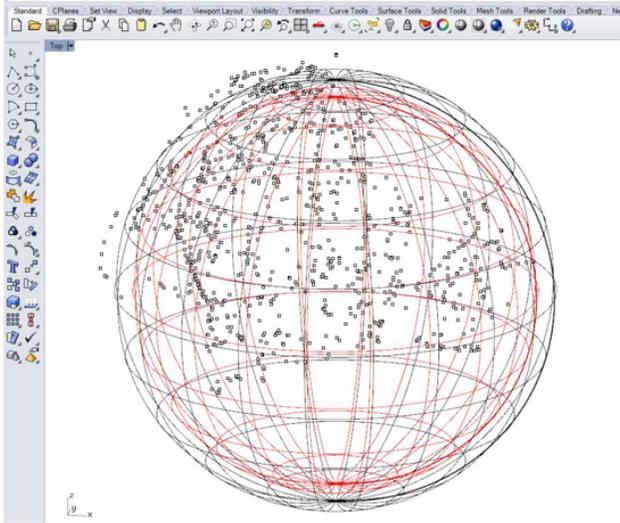
Figura 16.- Experimento E09: Mediciones en CAD 3D Rhinoceros tomadas con el digitalizador a la esfera patrón. En (a) se muestra la esfera roja producto del ajuste, mientras que en negro el valor ideal. En (b) se muestra el mapa de color de las desviaciones.

**Experimento E10**

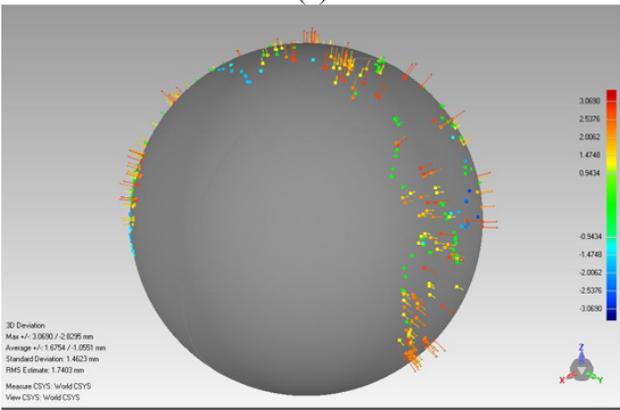
A continuación se presentan los valores del experimento E10:

**Tabla VII.-** Valores (mm) de desviación a la esfera E10

Número de puntos	756
Desviación estándar	1.8265
Desviación promedio	1.6803 / -1.4560
Diámetro resultado del ajuste Gauss-Newton	67.0168
Error calculado	5.5168



(a)



(b)

**Figura 17.-** Experimento E10: Mediciones en CAD 3D Rhinoceros tomadas con el digitalizador a la esfera patrón. En (a) se muestra la esfera roja producto del ajuste, mientras que en negro el valor ideal. En (b) se muestra el mapa de color de las desviaciones.

**Experimento E11**

A continuación se presentan los valores del experimento E11:

**Tabla VIII.-** Valores (mm) de desviación a la esfera E11

Número de puntos	682
Desviación estándar	0.9680
Desviación promedio	1.4823 / -0.7034
Diámetro resultado del ajuste Gauss-Newton	64.4288
Error calculado	2.9288

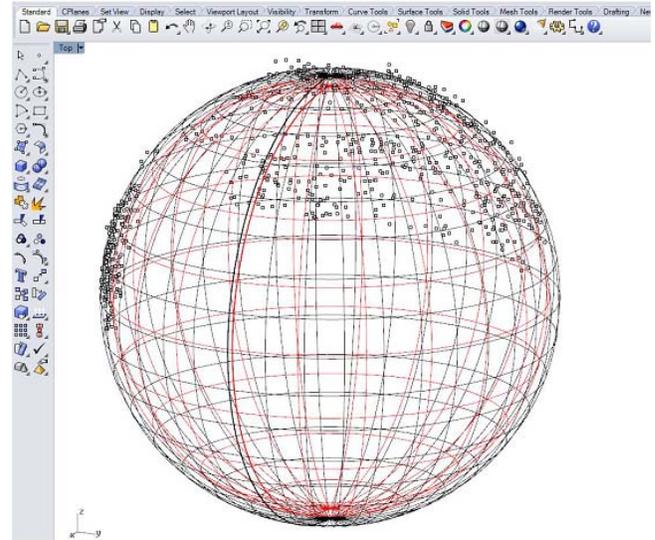
**Conclusiones y trabajos a futuro**

Se ha presentado una síntesis del relativamente nuevo estándar de pruebas ISO 10360-6 que permite evaluar cálculos internos basados en geometrías de referencia.

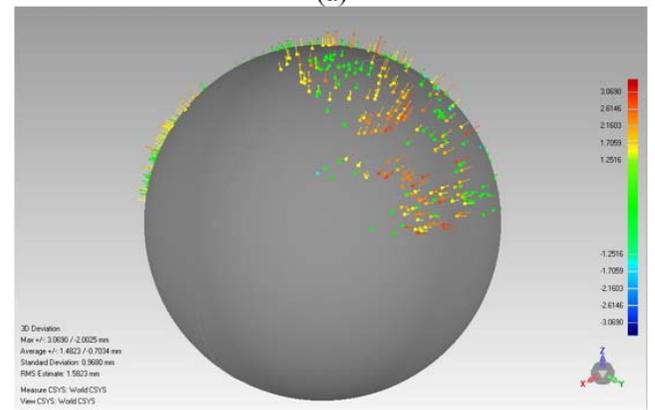
En este trabajo se han presentado los fundamentos para el ajuste de datos experimentales a formas un sistema lineal de coeficientes, tanto lineales como no lineales. Se desarrolló de manera detallada el procedimiento para obtener los cál-

culos que permiten cuantificar los errores de un prototipo de digitalizador 3D de desarrollo propio.

El ajuste a un plano arrojó medidas de 8.085in x 11.827in para el patrón de 8in x 12in, con un error máximo positivo del plano de 1.07% y un error máximo negativo del plano de -1.53%.



(a)



(b)

**Figura 18.-** Experimento E11: Mediciones en CAD 3D Rhinoceros tomadas con el digitalizador a la esfera patrón. En (a) se muestra la esfera roja producto del ajuste, mientras que en negro el valor ideal. En (b) se muestra el mapa de color de las desviaciones.

Los valores de ajuste y error de la aproximación esférica se muestran en la Tabla IX. Se puede concluir una relación entre la cantidad de puntos medidos y el error, sin embargo, es necesario descartar el sesgo que se puede producir al no abarcar el muestreo a lo largo de la superficie.

**Tabla IX.-** Resultados del error en la aproximación esférica

	Puntos medidos	Diam. ajuste (mm)	%Error
E00	757	64.43	4.55
E09	208	69.68	11.74
E10	756	67.02	8.23
E11	682	64.43	4.55

Los resultados arrojados son un marco de referencia para usar el prototipo en situaciones de un grado de restricción holgado con un grado de certeza.

El método aquí mostrado permite evaluar el desempeño de digitalizadores comerciales y/o programas computacionales de asistencia para digitalizadores convencionales, así como métodos de tecnologías emergentes.

Nuevas tecnologías están emergiendo para satisfacer la necesidad de digitalizar geometrías y ambientes virtuales, por lo que a corto plazo se vislumbran expansiones de los estándares actuales. Como un trabajo a futuro los autores se plantean evaluar el desempeño de un digitalizador 3D basado en fotogrametría utilizando software y cámaras comerciales.

### Agradecimientos

El presente trabajo fue realizado en el marco de la línea de generación y aplicación de conocimiento: “Optimización geométrica de productos” del Cuerpo Académico Sistemas Integrados de Manufactura de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, UANL con el apoyo financiero de la misma.

### Referencias

- [1] C.F. Gauss. “*lat. Theoria Motus. Theorie der Bewegung*”. 1809. German translation of relevant place: Gauss (1887, pp. 92–117). English translation: “Theory of Motion...”. Boston, 1857; Mineola, 2004.
- [2] L. Iuliano, P. Minetola and A. Salmi. “*Proposal of an innovative benchmark for comparison of the performance of contactless digitizers*”. IOP Publishing. Measurement Science and Technology, 21 105102 (13pp, 2010).
- [3] Yang Hu, Qingping Yang, Xizhi Sun. “*Design, Implementation, and Testing of Advanced Virtual Coordinate-Measuring Machines*”. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 61, NO. 5, May 2012.
- [4] Y. Wu, H. Wang, Z. Li. “*Quotient Kinematics Machines: Concept, Analysis, and Synthesis*”. Journal of Mechanisms and Robotics, ASME. vol. 3. May 2011.
- [5] Nicola D'Apuzzo. “*Overview of 3D surface digitization technologies in Europe*”. Three-Dimensional Image Capture and Applications VI, Proc. of SPIE-IS&T Electronic Imaging, SPIE Vol. 6056, San Jose California, USA, 2006.
- [6] S. Winkelbach, S. Molkenstruck and F. Wahl. “*Low-Cost Laser Range Scanner and Fast Surface Registration Approach*”. K. Franke et al. Editors. DAGM, LNCS 4174, pp. 718–728. Springer Berlin Heidelberg 2006.
- [7] J. Reznicek, K. Pavelka. “*New low-cost 3d scanning techniques for cultural heritage documentation*”. The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. Vol. XXXVII. Part B5. Beijing 2008.
- [8] Y. F. Li and Z. G. Liu. “*Method for determining the probing points for efficient measurement and reconstruction of freeform surfaces*”. Measurement Science and Technology. 14 p1280–1288. Institute of Physics Publishing 2003.
- [9] S. J. Lee and D. Y. Chang. “*Laser scanning probe with multiple detectors used for sculptured surface digitization in reverse engineering*”. 7th International Symposium on Measurement Technology and Intelligent Instruments. Journal of Physics: Conference Series 13 155–158. Institute of Physics Publishing, 2005.
- [10] Ramírez, F., López, E. Ortiz, U., Guzmán, R. “*Reducción de la concentración de esfuerzos para piezas de fundición por medio del método de elementos finitos utilizando algoritmos de crecimiento biológico*”. IX Congreso Anual SOMIM 2003 vol. VI, pág. 25, Sept. 2003.
- [11] Ramírez, F., López, E. Ortiz, U., Guzmán, R. “*Diseño óptimo de elementos mecánicos usando algoritmos de crecimiento biológico*”. Revista Ingenierías vol. VII, no. 22, 2004.
- [12] Ramírez, F., López, E. Ocañas, J. “*Optimización geométrica con criterio de crecimiento biológico para la reducción de la concentración de esfuerzos en uniones*”. X Congreso Anual SOMIM 2004 Sept. 2004.
- [13] Ramírez, F., López, E. Romero, I. “*Optimización geométrica con criterio de crecimiento biológico para la reducción de la concentración de esfuerzos en placas con perforaciones transversales*”. XI Congreso Internacional Anual SOMIM, Sept. 2005.
- [14] E. López, F. Ramírez, I. Márquez, J. de la Garza, A. Castillo. “*Relación de la geometría de elementos mecánicos con el cambio de forma en la naturaleza como criterio de diseño*”. XVI Congreso Internacional Anual SOMIM, Sept. 2010. ISBN 968-9173-01-4
- [15] E. López, F. Ramírez, I. Romero, J. de la Garza, J.L. Castillo. “*Diseño de un instrumento para la captura de geometrías 3D con aplicación en la manufactura de productos*”. Revista de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica. Vol. 2 No. 3, Año 5 (2006) p. 101-110 ISSN 1665-7381.
- [16] E. López, I. Márquez, D. Franco, F. Ramírez. “*Elaboración de bustos por medio de digitalización 3D y prototipos rápidos*”. XIV Congreso Internacional Anual SOMIM p.836-846, sept. 2008. ISBN 968-9173-01-4.
- [17] E. López, F. Ramírez, A. Ávila. “*Digitalización 3D como herramienta en la manufactura de calzado deportivo*”. XV Congreso Internacional Anual SOMIM p.137-146, sept. 2009. ISBN 968-9173-01-4.

- [18] E. López, F. Garza, F. Ramírez. “*Diseño y construcción de un brazo digitalizador para la captura de geometrías*”. Revista Ingenierías, Abril - Junio de 2014, vol. XVII, No. 63, p45-57. ISSN 1405-0676.
- [19] J. Guo, Y. Wang. “*Study on Calibration Technology of Portable Coordinate Measuring Machines*”. International Conference on Electronics and Optoelectronics. V4 170-173. IEEE 2011.
- [20] G. Gao, W. Wang, K. Lin, Z. Chen. “*Kinematic Calibration for Articulated Arm Coordinate Measuring Machines Base on Particle Swarm Optimization*”. Second International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation. IEEE 2009.
- [21] K. Shimojima, R. Furutani, K. Takamasn and K. Araki. “*The Estimation Method of Uncertainty of Articulated Coordinate Measuring Machine*”. IEEE ICIT'02. Bangkok, THAILAND 2002.
- [22] M. Vrhovec, M. Munih. “*Improvement of Coordinate Measuring Arm Accuracy*”. Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. San Diego, CA, USA, Oct 29-Nov 2, 2007.
- [23] G. Gao, W. Wang, K. Lin, Z. Chen. “*Structural Parameter Identification for Articulated Arm Coordinate Measuring Machines*”. International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. p128-131. Computer Society IEEE 2009.
- [24] H.P. Jawale, H.T. Thorat. “*Investigation of Positional Error in Two Degree of Freedom Mechanism With Joint Clearance*”. Journal of Mechanisms and Robotics. Transactions of the ASME, vol. 4. February 2012.
- [25] E. Barini, G. Tosello, L. De Chiffre. “*Uncertainty analysis of point-by-point sampling complex surfaces using touch probe CMMs DOE for complex surfaces verification with CMM*”. Precision Engineering 34 pp.16–21. 2010 Elsevier Ltd.
- [26] S. Lin, P. Wang, Y. Fei, C. Chen. “*Simulation of the errors transfer in an articulation-type coordinate measuring machine*”. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, pp.879-886. 2006 Springer.
- [27] J. Santolaria, J. Aguilar, D. Guillomía, C. Cajal. “*Kinematic parameter estimation technique for calibration and repeatability improvement of articulated arm coordinate measuring machines*”. Precision Engineering 32 pp. 251–268. 2008 Elsevier Ltd.
- [28] J. Santolaria, J. Aguilar, D. Guillomía, C. Cajal. “*A crenellated-target-based calibration method for laser triangulation sensors integration in articulated measurement arms*”. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing 27 pp. 282–291. 2011 Elsevier Ltd.
- [29] Z. Li, Y. Wang. “*Research on 3D Reconstruction Procedure of Marked Points for Large Workpiece Measurement*”. 2009 Fifth International Conference on Information Assurance and Security. Computer Society IEEE 2009.
- [30] F. Mazzini, S. Dubowsky. “*Experimental Validation of the Tactile Exploration by a Manipulator With Joint Backlash*”. Journal of Mechanisms and Robotics, ASME. vol. 4. February 2012.
- [31] I. Puertas, C.J. Pérez, D. Salcedo, J. León, R. Luri, J.P. Fuertes. “*Precision study of a coordinate measuring machine using several contact probes*”. Procedia Engineering 63 pp. 547–555. 2013Elsevier Ltd.
- [32] J. Sladek, K. Ostrowska, A. Gaska. “*Modeling and identification of errors of coordinate measuring arms with the use of a metrological model*”. Measurement 46 pp. 667–679. 2013Elsevier Ltd.
- [33] G. Du, P. Zhang. “*Online robot calibration based on vision measurement*”. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing 29 pp. 484–492. 2013Elsevier Ltd.
- [34] G.R. Chapman, G. Chen, P.T. Kim. “*Assessing Geometric Integrity Through Spherical Regression Techniques*”. Statistica Sinica 5, p173-220. (1995).
- [35] H. Späth. “*Least Squares Fitting with Spheres*”. J. of Optimization Theory and Applications 96, 191-199 (1998).
- [36] T. Tomic, I. Tomic and P. Frossard. “*Nonparametric least squares regression for image reconstruction on the sphere*”. PCS'09 Proceedings of the 27th conference on Picture Coding Symposium, p 133-136. IEEE Press Piscataway, NJ, USA ©2009 ISBN: 978-1-4244-4593-6.
- [37] C. Witzgall, G.S. Cheok, A.J. Kearsley. “*Recovering Spheres from 3D Point Data*”. AIPR '06 Proceedings of the 35th Applied Imagery and Pattern Recognition Workshop. IEEE Computer Society Washington, DC, USA ©2006. ISBN:0-7695-2739-6.
- [38] Zhou Shijian, GUAN Yunlan, Zhan Xinwu, Lu Tieding. “*Robust algorithm for fitting sphere to 3d point clouds in terrestrial laser scanning*”. XXIst ISPRS Congress: Commission V, WG 3, Beijing, p.519-522 (2008).
- [39] G. Calafiore. “*Approximation of n-Dimensional Data Using Spherical and Ellipsoidal Primitives*”. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems and Humans, Vol. 32, No. 2, March 2002.
- [40] V.J. Patel, R.B. Gandhi. “*Evaluation of Spherical Form Error Using Maximum Distance Point Strategy (MDPS)*”. International Journal of Engineering Research and Applications vol. 2, Issue 6, pp.1610-1615 ISSN: 2248-9622. (2012).
- [41] I.A. Al-Subaihi. “*Fitting two concentric spheres to data by orthogonal distance regression*”. Mathematical Communications 13, p233-239.(2008).