

**Tema A2a Materiales: Educación en Ingeniería Mecánica**

**“Estimación apriorística de errores en la aplicación del MEF mediante polinomios interpolantes de Lagrange”**

**A. Camacho Galván<sup>a</sup>, A. Ortiz Prado<sup>a</sup>, V. Jacobo Armendáriz<sup>a</sup>, J. Cruz Trani<sup>a</sup>.**

<sup>a</sup>Universidad Nacional Autónoma de México, Avenida Universidad n°3000, Ciudad de México C.P:04510, México

<sup>\*</sup>J. Cruz Trani, trani.jorge@yandex.com

---

**RESUMEN**

---

La velocidad de procesamiento y precisión de los resultados aportados por el método del elemento finito (MEF) dependen en gran medida de las rutinas de interpolación aplicadas.

Y en este sentido se manifiestan dos tipos de errores, los debidos a las diferencias entre la función aproximada y la función exacta y los provocados por las discrepancias entre los gradientes de la función aproximada.

En la literatura del MEF figuran mayoritariamente los polinomios de Lagrange en sus dos acepciones: como técnicas de soporte para la aproximación de funciones y además por su potencial para conformar el espacio de las funciones de prueba y de peso en los esquemas requeridos por los métodos variacionales.

En este trabajo se expone el análisis de los errores lagrangianos como un tema de relevancia por sí mismo, además de ser un catalizador para el estudio del análisis funcional y métodos operacionales concomitantes.

**ABSTRACT**

The processing speed and precision of the results provided by the finite element method (FEM) depend to a great extent on the applied interpolation routines.

And in this sense two types of errors are manifested, those due to the differences between the approximate function and the exact function, and those caused by the discrepancies between the gradients of the approximate function.

In the literature of the FEM are mainly Lagrange polynomials in their two meanings: as support techniques for the approximation of functions and also for their potential to conform the space of test functions and weight in the schemes required by the variational methods.

In this paper the analysis of lagrangian errors as a matter of relevance by itself is presented, as a catalyst for the study of the functional analysis and concomitant operational methods.

Palabras Clave: Método del elemento finito, polinomios de interpolación de Lagrange, espacio de funciones, teorema extendido de Rolle

---

**1. Introducción**

El MEF es un procedimiento clásico de mallas, el cual incluye diversas técnicas destinadas a la solución numérica de aplicaciones formuladas en términos de ecuaciones diferenciales y se caracteriza, esencialmente, por concentrar la información en los nodos de la malla.

La versatilidad del MEF aunada a la riqueza de las formulaciones matemáticas que soporta, lo singularizan como un valioso recurso del análisis numérico, además posee capacidad para modelar dominios de compleja estructura geométrica y, además, soltura al implementar las condiciones de frontera.

En cuanto a los procedimientos el MEF incluyen ecuaciones ordinarias y en derivadas parciales,

implicándose así los tres tipos de ecuaciones: elípticas, hiperbólicas y parabólica, en consecuencia, los correspondientes modelos físicos asociados.

Dada la extensión del tema, este documento se limita a problemas de valores en la frontera (PVF) formulados en términos de ecuaciones diferenciales del tipo elíptico.

Los modelos físicos se transportan a los modelos matemáticos formulados en términos de PVF.

El MEF en una variable espacial (1D) involucra funciones del tipo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  para ser masivamente evaluadas, derivadas o integradas; ante los inconvenientes para instrumentar computacionalmente cada una de las instancias posibles, se pluraliza en el campo de las aplicaciones recurriendo a los métodos de interpolación polinomial.

Por otra parte, los polinomios de Lagrange han mostrado ventajas para configurar bases de funciones finitas adaptadas a la formulación débil asociado a problemas de valores en la frontera.

Toda vez satisfechos ambos protocolos se prepara el paso del modelo continuo al modelo discreto insertando el dominio del PVF original en un espacio euclideo  $H_h$  integrado por las funciones de malla  $u_h$  y con el producto interior usual.

$$Lu = f \quad (1)$$

Es decir, dados  $u, f \in H = H_h$  y  $L$  es un operador diferencial elíptico se buscan soluciones aproximadas para el PVF.

Toda vez elegida alguna base para  $H$  la ecuación (1) desemboca en un sistema algebraico de ecuaciones donde el planteamiento diferencial se identifica con un sistema de ecuaciones lineales insertado en un espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

Así pues, bajo este esquema se consideran los efectos de dos tipos de errores de interpolación al aplicarse el MEF; a saber, los derivados de las diferencias entre la función interpolada, la función conocida y las diferencias entre los gradientes de la función conocida y los gradientes de la función interpolada.

Los polinomios que aproximan son polinomios de Lagrange.

## 2. Polinomios de Lagrange

Los polinomios de interpolación en una variable son funciones con un número discreto de datos y en general se aplican para alcanzar los siguientes fines:

- Graficar curvas suaves entre datos puntuales discretos.

- Simplificar la evaluación de funciones matemáticas complicadas.
- Estimar funciones continuas subyacentes entre datos puntuales.
- Derivar funciones continuas subyacentes entre datos puntuales.
- Integrar funciones continuas subyacentes entre datos puntuales.

En particular los polinomios de interpolación de Lagrange de orden  $n$  consideran un conjunto de  $n + 1$  puntos distintos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  donde los  $n + 1$  valores de una cierta función  $y_i = f(x_i)$  dada son conocidos de antemano y se estiman con la siguiente formula.

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) / \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad (2)$$

El intervalo más pequeño de la partición que contiene al punto  $x$ , entonces existe un punto  $\zeta(x) \in I$  tal que.

$$f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) + R(x) \quad (3)$$

donde

$$R(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!} \quad (4)$$

Frecuentemente se busca el valor absoluto del error en el peor de los posibles escenarios:

$$|R(x)| \leq \frac{\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq \zeta \leq x_n} |f^{(n+1)}(\zeta(x))| \quad (5)$$

La práctica ha validado la comodidad obtenida al fraccionar la fórmula anterior:

Definiendo

$$C_n = \frac{1}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \quad (6)$$

$$M = \frac{1}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(\zeta(x))| \quad (7)$$

La formula (5) adquiere la forma

$$|R(x)| \leq C_n M \quad (8)$$

Como material de apoyo se cuenta con los teoremas que se enuncian en las secciones subsecuentes.

## 2.1 Teorema extendido de Rolle.

Sea  $f(x) \in C^2[a, b]$ , donde  $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ . para cada  $x \in [a, b]$  existe un número  $\zeta$  que cumple con la condición  $\min\{x_0, x_1, x\} < \zeta < \max\{x_0, x_1, x\}$  tal que

$$f(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2}f^{(3)}(\zeta) \quad (9)$$

## 2.2 Teorema de aproximación de Weierstrass.

Dada la función  $f$  definida y continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ ,  $a < b$ , existe un polinomio de interpolación  $P$  definido en  $[a, b]$  tal que  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$  para toda  $x \in [a, b]$ .

## 3 Ejemplos de aplicación

Se pide aproximar la función  $f(x) = \text{sen}(x)$  en el intervalo  $I = [0, \pi]$  con polinomio de Lagrange de segundo grado con base en una partición tripuntual de puntos equidistantes y sugerir alguna cota superior para el valor absoluto del error.

Se considera la partición del dominio  $P = \{x_0, x_1, x_2\}$  donde  $x_0 = 0, x_1 = \pi/2, x_2 = \pi$ . En dichos puntos los valores de la función trigonométrica y el polinomio  $P_2(x)$  deben coincidir.

$$P_2(x_i) = \text{sen}(x_i), i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

Se obtiene:

$$P_2(x) = -\frac{4x(x-\pi)}{\pi^2} \quad (11)$$

En la figura 1 se sobreponen las gráficas de  $\text{sen}(x)$  y  $P_2(x)$

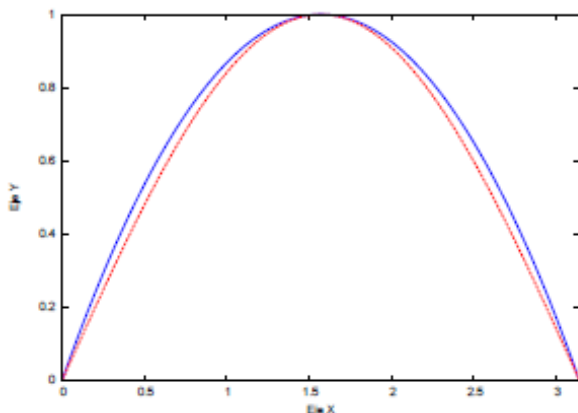


Figure 1 - La función  $\text{sen}(x)$  (azul) y  $P_2(x)$  (Rojo)

En la figura 2 se muestran los resultados obtenidos al graficar el valor absoluto del error el cual expone sugestivos detalles

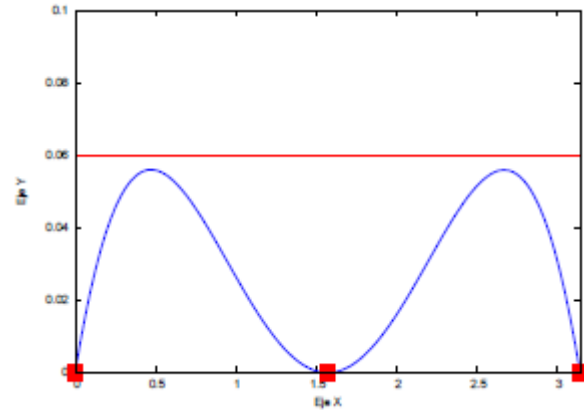


Figure 2 - Acotación visual del error

En la figura se observa:

- La gráfica del error absoluto  $|\text{sen}(x) - P_2(x)|$  acotada superiormente
- La ubicación visual de los máximos  $x_1^*$  y  $x_2^*$ : ( $x_1^* = 0.4791$   $x_2^* = 2.6697$ )
- El punto de la partición más cercano a la abscisa  $x_1^*$  es el punto  $x_0$
- El punto de la partición más cercano a la abscisa  $x_2^*$  es el punto  $x_2$
- El error nulo en los puntos de la partición  $P = \{x_0, x_1, x_2\}$

Observaciones de interés especial

- El paso o diámetro de la partición es  $h = (x_2 - x_0)/n$  en donde  $n$  es el número de subintervalos.
- El número de nodos  $m$  de la partición es  $m = n + 1$
- El error absoluto satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el subintervalo  $[x_0, x_1]$
- El error absoluto satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el subintervalo  $[x_1, x_2]$
- La primera derivadas del error absoluto satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el subintervalo  $[x_1^*, x_2^*]$

Los últimos tres incisos inducen la aplicación reiterada del teorema Rolle para la obtención del teorema generalizado de Rolle

Desde el punto de vista del análisis numérico el dominio  $\Omega_e$  se puede subdividir en dos elementos con simetría especular:

El ejemplo intenta proporcionar una visión conceptual del ejemplo en cuestión.

Para las aplicaciones numéricas se debe reducir el diámetro  $h$  de la partición pues las cotas de los errores son de orden  $O(h^3)$ .

#### 4 Espacios de funciones

Los espacios de funciones son semejantes a los espacios vectoriales, pero en este caso los polinomios de Lagrange asumen el rol de vectores.

No es difícil verificar como los coeficientes de Lagrange constituyen una base para el espacio vectorial integrado con polinomios de  $P_n$ .

En efecto, sea la combinación lineal

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) = 0. \quad (12)$$

Luego, particularizando  $x = x_j$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  se obtiene (13)

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j = 0 \quad (13)$$

Constando

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n L_i(x_j) f(x_j) = \delta_{ij} f(x_j) = f(x_i). \quad (14)$$

El producto interior de las funciones  $f, g \in C^2[a, b]$  se acostumbra definir así:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g^*(x) dx \quad (15)$$

En este punto procede realizar un resumen caracterizado a los polinomios de Lagrange:

- El teorema de aproximación de Wierstrass garantiza la aproximación uniforme polinomial de cualquier función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

El teorema no indica la forma de obtener el polinomio de aproximación, de eso se encarga diversos procedimientos, como el de Lagrange, el de Newton y otros.

- Los coeficientes de Lagrange se derivan con facilidad, obteniéndose como resultado un polinomio.
- La integral definida de los coeficientes de Lagrange se deduce sin mayores problemas, el resultado es igualmente, un polinomio.
- Características principales de las bases de Lagrange: Son polinomios tales que  $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$   
Por su parte, derivando se obtiene  $\sum_{i=0}^n L_i'(x) = 0$

Al aproximar la función  $f(x) \in C^{n+1}$  aplicando el teorema de Taylor, el error se estima con la fórmula

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (16)$$

En la estimación del error participa un solo punto  $x_0$ .

En la interpolación Lagrangiana, el error se realiza con base en la fórmula (17)

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad (17)$$

donde interviene la información de  $n+1$  puntos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

La precisión en la interpolación de funciones con polinomios depende en gran medida de la magnitud del paso de la malla  $h$ ; por esta causa resulta adecuado plantear intervalos de longitud reducida.

Sea la función  $g(x) \in C^{n+1}$ , se acostumbra partir el intervalo  $\Omega = \{x: a \leq x \leq b\}$  en un cierto número de los subintervalos  $\Omega_i = \{x: x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$  siendo  $x_{i-1}$  y  $x_i$  nodos vecinos de la malla, manteniendo la ecuación (18)

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i \quad (18)$$

A este modo de proceder se le denomina aproximación polinómica fragmentaria la cual desemboca, de modo natural en los denominados elementos finitos.

#### 4.1 Ejemplo

Se pide encontrar el polinomio interpolador de Lagrange de primer grado correspondiente a la función  $f(s) = \text{sen}((\pi/2)s)$ , en  $I = [0, \pi/2]$ .

La transformación  $x \rightarrow x = (\pi/2)s$  convierte el dominio paramétrico  $I = \{s : 0 \leq s \leq 1\}$  en el espacio físico  $\Omega = \{x : 0 \leq x \leq \pi/2\}$ .

Los puntos donde inciden los valores de la función y el polinomio interpolador corresponden a los extremos del dominio.

El polinomio interpolador requerido es

$$P_1(s) = L_1(s) = s \quad (19)$$

Siendo, en consecuencia, la magnitud del error

$$\|error\|_{\infty} = 0.2105 \quad (20)$$

El polinomio integrador es

$$f_h(x) = f\left(\frac{1}{4}\right)\phi_1(x) + f\left(\frac{1}{2}\right)\phi_2(x) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\phi_4(x) \quad (21)$$

El error alcanza su máximo, precisamente en el punto  $s=3/4$  donde la magnitud de la norma es

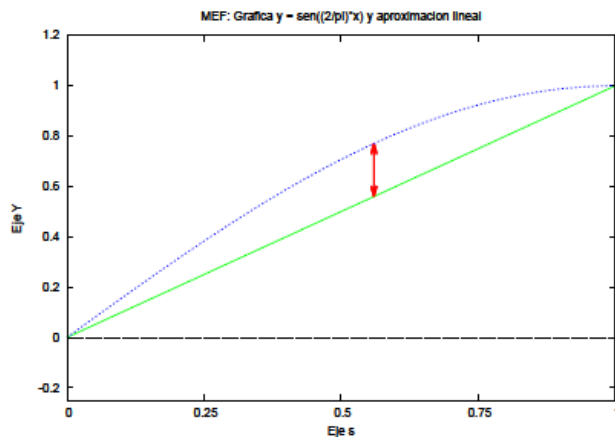


Figure 3 – La función  $f(s)$  y aproximación lineal.

$$\|error\|_{\infty} = 0.0118851 \quad (22)$$

La fragmentación del dominio disminuyó la magnitud del error

Y precisamente con las funciones de malla  $f_h$  se conforma un espacio euclídeo  $H_h$  orientado al estudio de las bondades y limitaciones de los sistemas linealizados.

## 4.2 Ejemplo

Si bien es cierto que el uso de particiones con puntos igualmente espaciados despliegan un cierto confort computacional, también es cierto que el incremento del orden de los polinomios no siempre eleva la precisión del proceso de interpolación.

Las figuras (4) y (5) esclarecen los contratiempos que deben la algorítmica computacional.

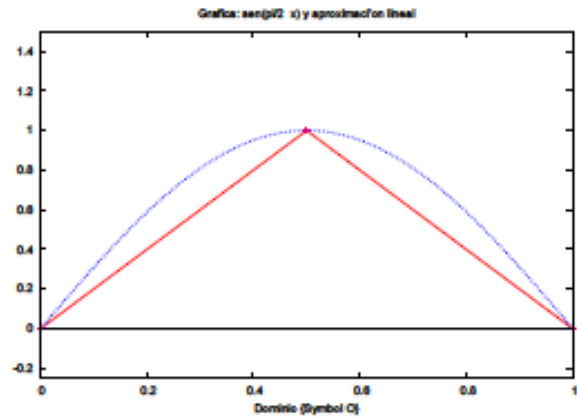


Figure 4 – Partición con un número impar de nodos.

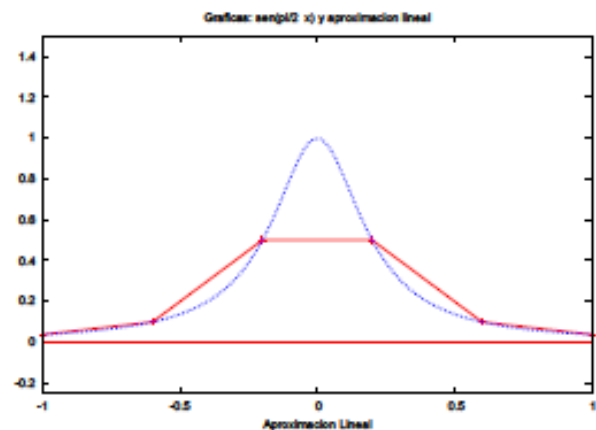


Figure 5 – Partición con número par de nodos.

En las figuras anteriores se puede apreciar visualmente las discrepancias resultantes al interpolar la función  $f(s) = \text{sen}((\pi/2)s)$  en el dominio  $[0,1]$  con particiones integradas con un número par o impar de nodos igualmente separados. La discrepancia principalmente se acentúa al centro del intervalo dado.

En ocasiones las anomalías devienen en aberraciones como el caso de la de la función de Runger[12].

Problemas de esta índole se abordan con los polinomios de Chebishev, los cuales se están abordando en la continuación de este trabajo.

## 5 Conclusiones

En este trabajo se han rozado, por limitaciones de espacio, el estudio de la virtudes y deficiencias de los polinomios de Lagrange aplicando a la estructura de las funciones base y de las cuales depende las matrices de rigidez.

Así mismo, se han esbozado las capacidades del teorema de Rolle generalizado aplicando al análisis de los errores en sus dos vértices: los errores derivados de las deficiencias a los métodos de aproximación y su impacto al transferirse los operadores diferenciales de un espacio continuo a un espacio discreto.

La ampliación del estudio de los tópicos apuntados a coadyuvar al análisis para su paso operativo de mallas reducidas a aquellos problemas de larga escala donde se confunden los métodos del gradiente conjugado y el método de Lanezos con las teorías de estabilidad de los operadores diferenciales.

Para la estimación apriorística de los errores en las aplicaciones del método del elemento finito se sugiere una intensa experimentación computacional con acceso del analista a los códigos computacionales fuente.

Se sugiere el uso del software libre: Linux, Gnuplot, wxMaxima

### Agradecimientos

Deseamos agradecer el apoyo brindado por parte de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico por parte del PAPIME PE111316.

### REFERENCIAS

---

- [1] Digital Library of Mathematical Functions  
Recuperado de: <https://dlmf.nist.gov/3.3>.
- [2] Kolmogorov, A. N. y Fomín, S. V. (1975). Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional Editorial MIR. Moscú.
- [3] Quarteroni, A., Sacco, A. y Salieri, F. (2000). Numerische Mathematik 1. ISBN: 3-540-67878-6. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [4] Quarteroni, A., Sacco, A. y Salieri, F. (2000). Numerische Mathematik 2. ISBN: 3-540-7878-2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [5] GNU Fortran - GNUProject. Recuperado de: <https://gcc.gnu.org/fortran/>. [6] GNU Plot Home Page. Recuperado de: <https://gnuplot.info/>.
- [7] Gauss-Legendre Quadrature - California State U. Recuperado de <https://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/n2003/GaussianQuadMod.html>.
- [8] Introduction to programming using Fortran 95.
- [9] Recuperado de: <https://www.fortrantutorial.com>.
- [10] Manual Maxima Recuperado de: [http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/de/maxima.html#SEC\\_Top](http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/de/maxima.html#SEC_Top)
- [11] Modern Programming Languages: Fortran90/95/2003/2008.  
Recuperado de: <https://www.fortrantutorial.com>.
- [12] Süli, E. y Mayers, D. (2003). An introduction to numerical analysis. ISBN: 0-521-81026-4 Cambridge University Press.
- [13] Todd Keene, E., & J. Wilson Mixon, Jr. (2016) Classical mechanics with Maxima ISBN 978-1-4939-3206-1 Springer New York Heidelberg Dordrecht London.